Zastosowania dwumianu Newtona w kombinatoryce

Zastosowania dwumianu Newtona w kombinatoryce

Źródło: Brett Jordan, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Ten materiał poświęcimy na prezentację zastosowań wzoru dwumianowego Newtona.

Pokażemy przydatne tożsamości dotyczące współczynników dwumianowych, nazywanych też symbolami Newtona.

Przy ich uzasadnianiu będziemy odwoływać się do stosownych modeli kombinatorycznych, jak również do rozwinięć odpowiednio dobranych wyrażeń dwumianowych.

Wśród omawianych przykładów oraz zadań proponowanych do samodzielnego rozwiązania znajdą się takie, które wykraczają poza wymagania podstawy programowej na poziomie rozszerzonym. Są one, jak się wydaje, interesującym uzupełnieniem szkolnej tematyki związanej z dwumianem Newtona.

Twoje cele

- Udoskonalisz umiejętność posługiwania się wyrażeniami zawierającymi współczynniki dwumianowe.
- Przekształcisz wyrażenia arytmetyczne, w których występują liczby zapisane za pomocą takich współczynników.
- Przekształcisz wyrażenia algebraiczne zapisane za pomocą współczynników dwumianowych.

- Stosując własności współczynników dwumianowych zapiszesz zależności między takimi współczynnikami na dwa sposoby, dzięki czemu uzasadnisz przydatne tożsamości.
- Obliczysz sumy zapisane z użyciem współczynników dwumianowych.

Przeczytaj

Dwumian Newtona to nazwa twierdzenia, zgodnie z którym potęgę dwumianu można rozwinąć w sumę jednomianów, przy których współczynniki liczbowe są odpowiednimi symbolami Newtona. Współczynniki te zwane są współczynnikami dwumianowymi.

Jeśli a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi i n jest dodatnią liczbą całkowitą, to:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Przykład 1

Rozpatrzmy jedenastą potęgę dwumianu $1+x$, czyli wyrażenie $(1+x)^{11}$.

Ponieważ
$(1+x)^{11} = \underbrace{(1+x)\cdot(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x)}_{11 \text{czynników}}$,
więc powyższe rozwinięcie jest sumą wyrazów postaci $1^k \cdot x^{11-k}$, gdzie
$k = 0, 1, 2, \ldots, 11$.
Oznacza to, że po redukcji wyrazów podobnych, otrzymamy wielomian zmiennej x, który jest sumą jednomianów postaci $a_k \cdot x^k$, gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots, 11$.
Wynika z tego, że każdy ze współczynników a_k jest liczbą całkowitą; w szczególności bez trudu ustalimy, że $a_0 = a_{11} = 1$ oraz $a_1 = a_{10} = 11$.
Obliczymy, ile jest równe a_7.

Rozwiązanie

Zauważmy, że obliczenie a_7 polega na ustaleniu, na ile sposobów z zapisanych powyżej 11 czynników $(1+x)$ można do iloczynu wybrać dokładnie 7 składników x (wtedy, oczywiście, z każdego z pozostałych 4 czynników wybieramy do iloczynu składnik 1).
Ponieważ każdy taki wybór 7 składników x z 11 dostępnych czynników postaci $(1+x)$ to 7 – elementowa kombinacja ze zbioru 11 – elementowego, więc współczynnik a_7 jest równy $a_7 = \binom{11}{7} = \frac{11!}{7!\cdot 4!} = 330$.

Rozumując podobnie stwierdzimy, że dla każdego $k = 0, 1, 2, \ldots, 11$ współczynnik a_k jest równy $\binom{11}{k}$, a więc omawiane rozwinięcie można zapisać w postaci

$(1+x)^{11} =$
$= \binom{11}{0}x^0 + \binom{11}{1}x^1 + \binom{11}{2}x^2 + \binom{11}{3}x^3 + \binom{11}{4}x^4 + \binom{11}{5}x^5 +$

$+\binom{11}{6}x^6+\binom{11}{7}x^7+\binom{11}{8}x^8+\binom{11}{9}x^9+\binom{11}{10}x^{10}+\binom{11}{11}x^{11}=$
$=x^{11}+11x^{10}+55x^9+165x^8+330x^7+462x^6+$
$+462x^5+330x^4+165x^3+55x^2+11x+1.$

Twierdzenie: wzór dwumianowy Newtona

Dla dowolnych liczb a, b oraz dowolnej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwy jest wzór

$$(a+b)^n=$$
$$=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n.$$

Dla dowodu zauważmy, że rozwinięcie n – tej potęgi dwumianu $(a+b)$ jest sumą wyrazów postaci $w_k\cdot a^{n-k}\cdot b^k$, gdzie $k=0,1,2,\ldots,n-1,n$.
Dla każdej z możliwych wartości k obliczenie współczynnika w_k polega na ustaleniu, na ile sposobów z n czynników $(a+b)$ można do iloczynu wybrać dokładnie k składników b (wtedy, oczywiście, z każdego z pozostałych $n-k$ czynników wybieramy do iloczynu składnik a).
Ponieważ każdy taki wybór k składników b z n dostępnych czynników postaci $(a+b)$ to k – elementowa kombinacja ze zbioru n – elementowego, więc dla każdego $k=0,1,2,\ldots,n-1,n$ współczynnik w_k, nazywany k – tym współczynnikiem dwumianowym, jest równy $\binom{n}{k}$.
Stąd
$$(a+b)^n=$$
$$=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n.$$
W ten sposób dowód został zakończony.

Uwaga. Zamieniając miejscami składniki a i b we wzorze $(a+b)^n$ dostaniemy $(b+a)^n$, a te wyrażenia są, oczywiście, tożsamościowo równe. Z porównania współczynników dwumianowych stojących przy tych samych jednomianach wynika równość $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, prawdziwa dla liczb całkowitych n, k spełniających warunek $0\le k\le n$.

Przykład 2

Wykażemy, że $\binom{2020}{7}+\binom{2020}{8}=\binom{2021}{8}$.

Rozwiązanie

Aby wykazać powyższą równość, obliczymy na dwa sposoby współczynnik przy x^8 w rozwinięciu $(1+x)^{2021}$.

Stosując wzór dwumianowy stwierdzamy, że współczynnik przy x^8 w rozwinięciu $(1+x)^{2021}$ jest równy $\binom{2021}{8}$.
Zauważmy z kolei, że prawdziwa jest równość
$(1+x)^{2021} = (1+x) \cdot (1+x)^{2020} = (1+x)^{2020} + x \cdot (1+x)^{2020}$.

Ze wzoru dwumianowego zastosowanego do rozwinięcia $(1+x)^{2020}$ odczytujemy, że współczynnik przy x^8 jest w nim równy $\binom{2020}{8}$, współczynnik przy x^7 jest w nim równy $\binom{2020}{7}$, więc w rozwinięciu $x \cdot (1+x)^{2020}$ współczynnik przy x^8 jest równy $\binom{2020}{7}$.
Oznacza to, że w rozwinięciu sumy $(1+x)^{2020} + x \cdot (1+x)^{2020}$ współczynnik przy x^8 jest równy $\binom{2020}{7} + \binom{2020}{8}$.
Z twierdzenia o wielomianach równych otrzymujemy stąd, że
$\binom{2020}{7} + \binom{2020}{8} = \binom{2021}{8}$, a to właśnie należało udowodnić.

Twierdzenie: rekurencyjna zależność między współczynnikami dwumianowymi

Dla liczb całkowitych n, k spełniających warunek $0 \leq k \leq n$ prawdziwa jest równość
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
Dowód przeprowadzamy rozumując podobnie, jak w przykładzie 2: obliczymy na dwa sposoby współczynnik przy x^k w rozwinięciu $(1+x)^{n+1}$.

Stosując wzór dwumianowy stwierdzamy, że współczynnik przy x^{k+1} w rozwinięciu $(1+x)^{n+1}$ jest równy $\binom{n+1}{k+1}$.
Zauważmy teraz, że prawdziwa jest równość
$(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n = (1+x)^n + x \cdot (1+x)^n$.

Ze wzoru dwumianowego zastosowanego do rozwinięcia $(1+x)^n$ odczytujemy, że współczynnik przy x^{k+1} jest w nim równy $\binom{n}{k+1}$, a współczynnik przy x^k jest w nim równy $\binom{n}{k}$, a więc w rozwinięciu $x \cdot (1+x)^n$ współczynnik przy x^{k+1} jest równy $\binom{n}{k}$.
Oznacza to, że w rozwinięciu sumy $(1+x)^n + x \cdot (1+x)^n$ współczynnik przy x^{k+1} jest równy $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

Z twierdzenia o wielomianach równych otrzymujemy stąd, że
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, a to właśnie należało udowodnić.

Uwaga. Powyższą tożsamość można uzasadnić algebraicznie, przekształcając następująco:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} =$$
$$= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)\cdot k!\cdot(n-k-1)!} =$$
$$= \frac{n!}{k!\cdot(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) =$$
$$= \frac{n!}{k!\cdot(n-k-1)!} \cdot \frac{n-k+k+1}{(n-k)(k+1)} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-k)(k+1)} =$$
$$= \frac{n!\cdot(n+1)}{k!\cdot(k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$
To właśnie należało udowodnić.

Przykład 3

Obliczymy wartość sumy S współczynników dwumianowych postaci $\binom{20}{k}$, gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots, 20$:
$$S = \binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \ldots + \binom{20}{19} + \binom{20}{20}.$$

Rozwiązanie

I **sposób**

Rozpatrzmy wszystkie podzbiory 20-elementowego zbioru $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}\}$. Jak już wiemy, jest ich ogółem 2^{20}.
Podzbiory te możemy również podzielić na rozłączne grupy ze względu na liczbę elementów podzbioru – wyróżnimy wtedy podzbiory o liczbie elementów równej $0, 1, 2, \ldots, 20$.
Wobec tego liczbę wszystkich podzbiorów zbioru A możemy zapisać też drugim sposobem, w postaci sumy
$$\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \ldots + \binom{20}{19} + \binom{20}{20}.$$
Oznacza to, że $\binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \ldots + \binom{20}{19} + \binom{20}{20} = 2^{20}$, a więc $S = 2^{20}$.

II **sposób**

Przyjmujemy we wzorze dwumianowym: $a = 1, b = 1, n = 20$.
Otrzymujemy wtedy równość
$(1+1)^{20} =$

$= \binom{20}{0} \cdot 1^{20} + \binom{20}{1} \cdot 1^{19} \cdot 1 + \binom{20}{2} \cdot 1^{18} \cdot 1^2 + \ldots + \binom{20}{20} \cdot 1^{20} =$
$= \binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \ldots + \binom{20}{20},$
stąd $S = \binom{20}{0} + \binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \ldots + \binom{20}{20} = 2^{20}$.

Rozumując podobnie, jak w rozwiązaniu powyższego przykładu zauważymy, że dla każdego zbioru n–elementowego liczbę jego wszystkich podzbiorów można zapisać na dwa sposoby: jako 2^n lub w postaci sumy
$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$.

Prawdziwe jest zatem twierdzenie.

Twierdzenie: o sumie współczynników dwumianowych

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość
$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Przykład 4

Obliczymy wartość sumy w współczynników dwumianowych postaci $\binom{21}{2k}$, gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$:
$w = \binom{21}{0} + \binom{21}{2} + \binom{21}{4} + \ldots + \binom{21}{18} + \binom{21}{20}$.

Rozwiązanie

I **sposób**

Rozpatrzmy 20–elementowy zbiór $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}\}$ oraz element b który nie należy do A.
Wtedy dowolny podzbiór zbioru A możemy wzajemnie jednoznacznie przyporządkować do zbioru otrzymanego przez dołączenie elementu b do tego podzbioru. W ten sposób wszystkie podzbiory 21–elementowego zbioru $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}, b\}$ zostały podzielone na pary takich podzbiorów, które różnią się tylko jednym elementem b. Zatem liczba elementów w podzbiorach w każdej opisanej parze różni się o 1.
Tak dobranych par jest tyle, ile wszystkich podzbiorów zbioru A, czyli 2^{20}. Ponadto dokładnie jeden z podzbiorów w każdej z opisywanych par ma parzystą liczbę elementów.
Oznacza to, że wszystkich podzbiorów zbioru $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}, b\}$ o parzystej liczbie elementów jest 2^{20}.

Ponieważ liczbę wszystkich podzbiorów 21–elementowego zbioru, które mają parzystą liczbę elementów można zapisać jako
$\binom{21}{0}+\binom{21}{2}+\binom{21}{4}+\ldots+\binom{21}{18}+\binom{21}{20}$,
więc $w=2^{20}$.

II sposób

Rozpatrzmy sumę t współczynników dwumianowych postaci $\binom{21}{2k+1}$, gdzie $k=0,1,2,\ldots,10$:
$t=\binom{21}{1}+\binom{21}{3}+\binom{21}{5}+\ldots+\binom{21}{19}+\binom{21}{21}$.

Korzystając z równości
$\binom{21}{k}=\binom{21}{21-k}$, prawdziwej dla każdej liczby całkowitej k spełniającej warunek $0\leq k\leq 21$, otrzymujemy:
$t=\binom{21}{1}+\binom{21}{3}+\binom{21}{5}+\ldots+\binom{21}{19}+\binom{21}{21}=$
$=\binom{21}{20}+\binom{21}{18}+\binom{21}{16}+\ldots+\binom{21}{2}+\binom{21}{0}=w$.
Ponadto $t+w=\binom{21}{0}+\binom{21}{1}+\binom{21}{2}+\binom{21}{3}+\ldots+\binom{21}{20}+\binom{21}{21}=2^{21}$.
Wobec tego $2w=2^{21}$, a więc $w=2^{20}$.

Uwaga. Równość $w=t$ można udowodnić również w następujący sposób.
Jeżeli we wzorze dwumianowym przyjmiemy: $a=1$, $b=-1$, $n=21$, to otrzymamy równość
$(1+(-1))^{21}=$
$=\binom{21}{0}\cdot 1^{21}+\binom{21}{1}\cdot 1^{20}\cdot(-1)+\binom{21}{2}\cdot 1^{19}\cdot(-1)^2+$
$+\binom{21}{3}\cdot 1^{18}\cdot(-1)^3+\ldots+\binom{21}{20}\cdot 1\cdot(-1)^{20}+\binom{21}{21}\cdot(-1)^{21}$.
Stąd $0^{21}=\left(\binom{21}{0}+\binom{21}{2}+\ldots+\binom{21}{20}\right)-\left(\binom{21}{1}+\binom{21}{3}+\ldots+\binom{21}{21}\right)$
a więc $w-t=0$, czyli $w=t$.

Rozumując podobnie, jak w rozwiązaniu sposobem I powyższego przykładu zauważymy, że dla każdego zbioru n–elementowego liczba jego wszystkich podzbiorów o parzystej liczbie elementów jest równa liczbie wszystkich podzbiorów tego zbioru, które mają nieparzystą liczbę elementów.
Można też odwołać się do wzoru dwumianowego – przyjmując w nim $a=1$, $b=-1$ otrzymujemy równość

$(1+(-1))^n =$
$$= \binom{n}{0} \cdot 1^n + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot (-1) + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot (-1)^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot (-1)^n$$
prawdziwą dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$.
Wynika stąd, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej prawdziwa jest równość
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot (-1)^n = 0$$
Ponieważ po jej lewej stronie każdy wyraz postaci $\binom{n}{k}$, w którym k jest liczbą parzystą zapisany jest ze znakiem plus, a każdy taki wyraz, w którym k jest liczbą nieparzystą zapisany jest ze znakiem minus, więc suma wszystkich wyrazów postaci $\binom{n}{k}$, w których k jest liczbą parzystą jest równa sumie wszystkich wyrazów tej postaci, w których k jest liczbą nieparzystą.

Podsumujemy powyższe spostrzeżenia, mając na uwadze, że liczba wszystkich podzbiorów zbioru k – elementowego jest równa 2^n.

Twierdzenie: o liczebności podzbiorów

W każdym zbiorze n – elementowym ($n \geq 1$) liczba wszystkich jego podzbiorów o parzystej liczbie elementów jest równa liczbie wszystkich podzbiorów tego zbioru o nieparzystej liczbie elementów i każda z tych wartości jest równa 2^{n-1}.

Przykład 5

Wyznaczymy liczbę całkowitą t, dla której zachodzi równość
$$\binom{100}{1} + \binom{100}{5} + \binom{100}{9} + \ldots + \binom{100}{97} = 2^t,$$
w której po lewej stronie jest suma współczynników dwumianowych postaci $\binom{100}{4m+1}$, gdzie $m = 0, 1, 2, \ldots, 24$.

Rozwiązanie

Korzystając z twierdzenia sformułowanego powyżej zauważamy, że liczba wszystkich podzbiorów zbioru 100–elementowego, które mają nieparzystą liczbę elementów jest równa 2^{99}.
Stąd otrzymujemy równość
$$\binom{100}{1} + \binom{100}{3} + \binom{100}{5} + \ldots + \binom{100}{99} = 2^{99}.$$

Ponieważ dla każdej liczby całkowitej k spełniającej warunek $0 \leq k \leq 100$ zachodzi zależność $\binom{100}{k} = \binom{100}{100-k}$, więc w szczególności

$\binom{100}{4m+1} = \binom{100}{100-(4m+1)}$, gdzie $m = 0, 1, \ldots, 24$.

Wobec tego po lewej stronie rozpatrywanej równości odnajdujemy 25 par równych liczb, zatem możemy ją przekształcić do postaci

$2 \cdot \binom{100}{1} + 2 \cdot \binom{100}{5} + 2 \cdot \binom{100}{9} + \ldots + 2 \cdot \binom{100}{97} = 2^{99}$,

skąd $\binom{100}{1} + \binom{100}{5} + \binom{100}{9} + \ldots + \binom{100}{97} = 2^{98}$, więc $t = 98$.

Przykład 6

Obliczymy sumę cyfr zapisu dziesiętnego liczby

$l = 3^0 \cdot \binom{9}{0} + 3^2 \cdot \binom{9}{1} + 3^4 \cdot \binom{9}{2} + \ldots + 3^{18} \cdot \binom{9}{9}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że kolejne składniki występujące w l są liczbami postaci

$\binom{9}{k} \cdot 3^{2k} = \binom{9}{k} \cdot 9^k \cdot 1^{9-k}$,

gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$, co oznacza, że w l występują wszystkie składniki rozwinięcia $(9+1)^9$, czyli $l = (9+1)^9 = 10^9 = 1000000000$.

Wobec tego suma cyfr zapisu dziesiętnego liczby l jest równa 1.

Przykład 7

Wyznaczymy wartość dodatniego współczynnika m, wiedząc, że po rozwinięciu wyrażenia $\left(2x^2 + \frac{m}{x}\right)^9$ otrzymujemy sumę, w której składnik niezawierający x jest równy 489888.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru dwumianowego, w którym przyjmujemy $a = 2x^2$, $b = \frac{m}{x}$ oraz $n = 9$.

Po rozwinięciu zadanego wyrażenia otrzymujemy sumę, której składniki możemy zapisać w postaci $\binom{9}{k} \cdot \left(2x^2\right)^{9-k} \cdot \left(\frac{m}{x}\right)^k$, gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

Ponieważ

$\binom{9}{k} \cdot \left(2x^2\right)^{9-k} \cdot \left(\frac{m}{x}\right)^k = \binom{9}{k} 2^{9-k} \cdot \left(x^2\right)^{9-k} \cdot m^k \cdot \left(x^{-1}\right)^k =$

$= \binom{9}{k} 2^{9-k} \cdot m^k \cdot x^{2(9-k)-k} = \binom{9}{k} 2^{9-k} \cdot m^k \cdot x^{18-3k}$,

więc wyrazem niezawierającym x jest ten, w którym wykładnik $18 - 3k$ jest równy 0.

Zatem $3k=18$, skąd $k=6$, czyli ten szukany wyraz jest równy $\binom{9}{6}2^{9-6}\cdot m^6=672m^6$.

Otrzymujemy wobec tego równanie $672m^6=489888$, skąd $m^6=729=3^6$, a więc $m=3$.

Słownik

k – elementowa kombinacja zbioru n – elementowego

każdy k–elementowy podzbiór zbioru n – elementowego, gdzie $0\le k\le n$, nazywamy k–elementową kombinacją tego zbioru n–elementowego

liczba wszystkich k –elementowych kombinacji zbioru n –elementowego

liczba wszystkich k – elementowych kombinacji zbioru n – elementowego, gdzie $0\le k\le n$, jest równa
$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k}$

wzór dwumianowy Newtona

dla dowolnych liczb a, b oraz dowolnej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwy jest wzór

$$(a+b)^n=$$
$$=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n$$

współczynnik dwumianowy

w rozwinięciu dwumianu współczynnik liczbowy zapisany przy wyrazie tego rozwinięcia.
W szczególności k–tym współczynnikiem dwumianowym w rozwinięciu $(a+b)^n$ jest liczba $\binom{n}{k}$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązania zadań dotyczących własności współczynników dwumianowych.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DWobqldb6

Film nawiązujący do treści lekcji, dotyczący zastosowania dwumianu Newtona w kombinatoryce.

Polecenie 2

Korzystając z przykładów omówionych w powyższej animacji, rozwiąż samodzielnie następujące zadania.

a) Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość
$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{n}{3} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}$.

b) Korzystając z otrzymanej równości udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwa jest równość
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = 6 \cdot \binom{n+3}{4} - 6 \cdot \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{2}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Liczbę $\left(2+\sqrt{3}\right)^5$ można zapisać w postaci $k+n\sqrt{3}$, gdzie k i n to dodatnie liczby całkowite. Oblicz $k+n$.
Zakoduj poniżej kolejno cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanej sumy.

Odpowiedź: $k+n$= ___ ___ ___.

Ćwiczenie 2

Oblicz współczynnik przy x^7 w rozwinięciu $\left(x^2+4x+4\right)^6$.

Odpowiedź: ___.

Ćwiczenie 3

Suma
$$\binom{21}{2}+\binom{21}{4}+\binom{21}{6}+\binom{21}{8}+\binom{21}{10}+\binom{21}{12}+\binom{21}{14}+\binom{21}{16}+\binom{21}{18}+\binom{21}{20}$$
jest równa

- 2^{21}
- 2^{20}
- $2^{20}-1$
- $2^{21}-1$

Ćwiczenie 4

Średnia arytmetyczna szesnastu liczb:

$$\binom{15}{0}, \binom{15}{1}, \binom{15}{2}, \ldots, \binom{15}{15}$$

jest równna

- 2^{13}
- 2^{11}
- 2^{16}
- 2^{15}

Ćwiczenie 5

Połącz w pary równe liczby.

$\binom{45}{45} + \binom{46}{45} + \binom{47}{45} + \binom{48}{45} + ($	$\binom{53}{45}$
$\binom{52}{43} + \binom{51}{9} + \binom{50}{10} + \binom{50}{41}$	$\binom{53}{43}$
$\binom{51}{44} + \binom{51}{45} + \binom{52}{44}$	$\binom{53}{44}$
$\binom{52}{8} + \binom{52}{9}$	$\binom{53}{46}$

Ćwiczenie 6

Rozpatrzmy sumę

$s = \frac{\binom{7}{0}}{5^7} + \frac{\binom{7}{1}}{5^6} + \frac{\binom{7}{2}}{5^5} + \frac{\binom{7}{3}}{5^4} + \frac{\binom{7}{4}}{5^3} + \frac{\binom{7}{5}}{5^2} + \frac{\binom{7}{6}}{5^1} + \frac{\binom{7}{7}}{5^0}$.

Oblicz s, a następnie zakoduj kolejno trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

Odpowiedź: ☐ ☐ ☐.

Ćwiczenie 7

Wśród wszystkich wyrazów w rozwinięciu wyrażenia

$$\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)^9$$

jest taki, który nie zawiera x. Wynika stąd, że ten wyraz

- ☐ jest większy niż 1000.
- ☐ jest mniejszy niż 200.
- ☐ jest większy niż 100.
- ☐ jest mniejszy niż 900.

Ćwiczenie 8

Rozpatrzmy liczbę

$$x = \left(\sqrt{3} + 1\right)^{10}$$

Liczba m jest największą spośród wszystkich liczb całkowitych mniejszych od x.
Oznacza to, że cyfra jedności liczby m:

- [ ] jest mniejsza od 7.
- [ ] jest nieparzysta.
- [ ] jest podzielna przez 3.
- [ ] jest większa od 4.

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowania dwumianu Newtona w kombinatoryce

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca wyrażenia arytmetyczne, w których występują liczby zapisane za pomocą współczynników dwumianowych,
- przekształca wyrażenia algebraiczne zapisane za pomocą współczynników dwumianowych,
- zapisuje zależności między współczynnikami dwumianowymi na dwa sposoby, dzięki czemu uzasadnia przydatne tożsamości,
- oblicza sumy zapisane z użyciem współczynników dwumianowych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Animacja”.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie przypominają definicję dwumianu Newtona

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Animacja”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie wykonują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
3. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- Symbol Newtona

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja" można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Zastosowania dwumianu Newtona w kombinatoryce".