Wyrażenia algebraiczne - powtórzenie

Wyrażenia algebraiczne - powtórzenie

Źródło: Elena Mozhvilo, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Dodawanie i odejmowanie liczb towarzyszy nam każdego dnia, na przykład w trakcie robienia zakupów. Z mnożeniem i dzieleniem mamy zaś wielokrotnie styczność podczas liczenia odsetek lub przy domowych wypiekach, gdy chcemy przygotować ciasto o innej masie niż to w przepisie.

Potrafimy więc bez trudu wyznaczać wartości nawet złożonych działań w sytuacji, gdy mamy określone dane. Problem pojawia się w chwili, gdy zamiast konkretnej liczby musimy przyjąć niewiadomą. Jest tak na przykład, gdy chcemy stworzyć prosty program liczący średnią ocen na koniec semestru, do którego użytkownik będzie mógł wpisywać dowolne wartości. Konieczność wprowadzania niewiadomych pojawia się także, gdy nie wiemy ile soli dosypać do szklanki wody, by otrzymać solankę o konkretnym stężeniu. Umiejętność posługiwania się abstrakcyjnymi zmiennymi jest zatem użyteczna nie tylko w matematyce. Warto więc dobrze opanować jej podstawy.

> **Twoje cele**
>
> - Przekształcisz wyrażenia algebraiczne.
> - Wykonasz działania na wyrażeniach algebraicznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy, że dla liczb a i b (przy odpowiednich założeniach) rozważamy podstawowe działania:

- dodawanie i odejmowanie

$$\underbrace{a}_{\text{składnik}} + \underbrace{b}_{\text{składnik}} = \underbrace{c}_{\text{suma}} \qquad \underbrace{a}_{\text{odjemna}} - \underbrace{b}_{\text{odjemnik}} = \underbrace{c}_{\text{różnica}}$$

- mnożenie i dzielenie

$$\underbrace{a}_{\text{czynnik}} \cdot \underbrace{b}_{\text{czynnik}} = \underbrace{c}_{\text{iloczyn}} \qquad \underbrace{a}_{\text{dzielna}} : \underbrace{b}_{\text{dzielnik}} = \underbrace{c}_{\text{iloraz}}$$

- potęgowanie i pierwiastkowanie

$$\underbrace{a}_{\text{podstawa}}^{n \longleftarrow \text{wykładnik}} \qquad \text{stopień} \longrightarrow \sqrt[n]{\underbrace{a}_{\text{argument}}}$$

Ważne!

Warto zauważyć, że odejmowanie można zastąpić dodawaniem, przyjmując $a - b = a + (-b)$. Podobnie użycie $a \cdot \frac{1}{b}$ zamiast $a : b$ oraz $a^{\frac{1}{n}}$ w miejsce $\sqrt[n]{a}$ prowadzi nas do wniosku, że warto skierować naszą uwagę na własności dodawania, mnożenia i potęgowania. Poczyniona tu obserwacja pozwala między innymi zamieniać kolejność dodawanych jednomianów w sumie algebraicznej.

Wyrażenie algebraiczne to liczba, litera lub liczby oraz zmienne połączone znakami działań i ewentualnie nawiasami .

Wyrażenia algebraiczne to między innymi:

- $f - w$
- $\frac{\pi R^2}{4}$
- $\sqrt{p(p-a)}$
- $a^2 + b^3 - c$

Podane powyżej przykłady wydają się dość skomplikowane. Tym bardziej, gdy chcemy je zapisać słowami. Na szczęście istnieje bardzo użyteczna, choć nieco nieformalna zasada: „*Czytamy przeciwnie do kolejności wykonywania działań*”.

Kliknij w przycisk, aby zobaczyć, jak się czyta poniższe wyrażenia.

Ze wszystkich wyrażeń algebraicznych wyróżniamy **jednomiany**, czyli te wyrażenia, które dają się przedstawić w postaci iloczynu liczb oraz zmiennych.

Jednomianami są wyrażenia: am, $7ab$, $\frac{3}{2}\pi R$

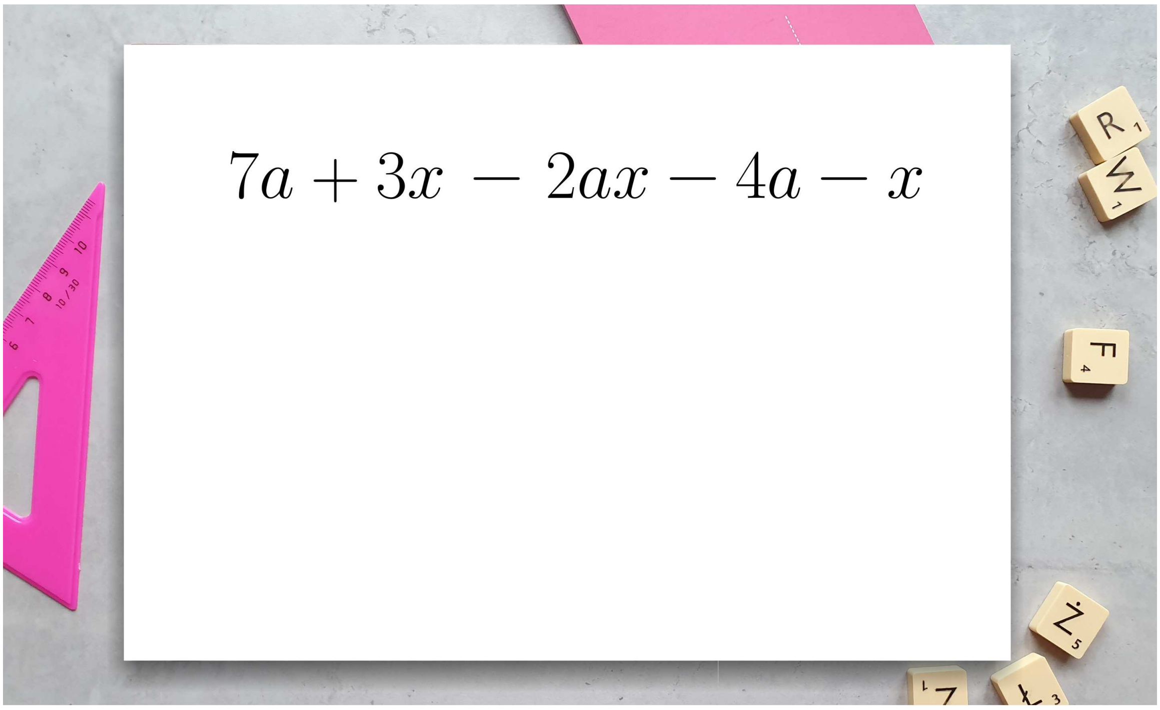
Wyrażenia, które nie są jednominami: $\omega_0 + \varepsilon t$, $W + \left(\frac{mv^2}{2}\right)$

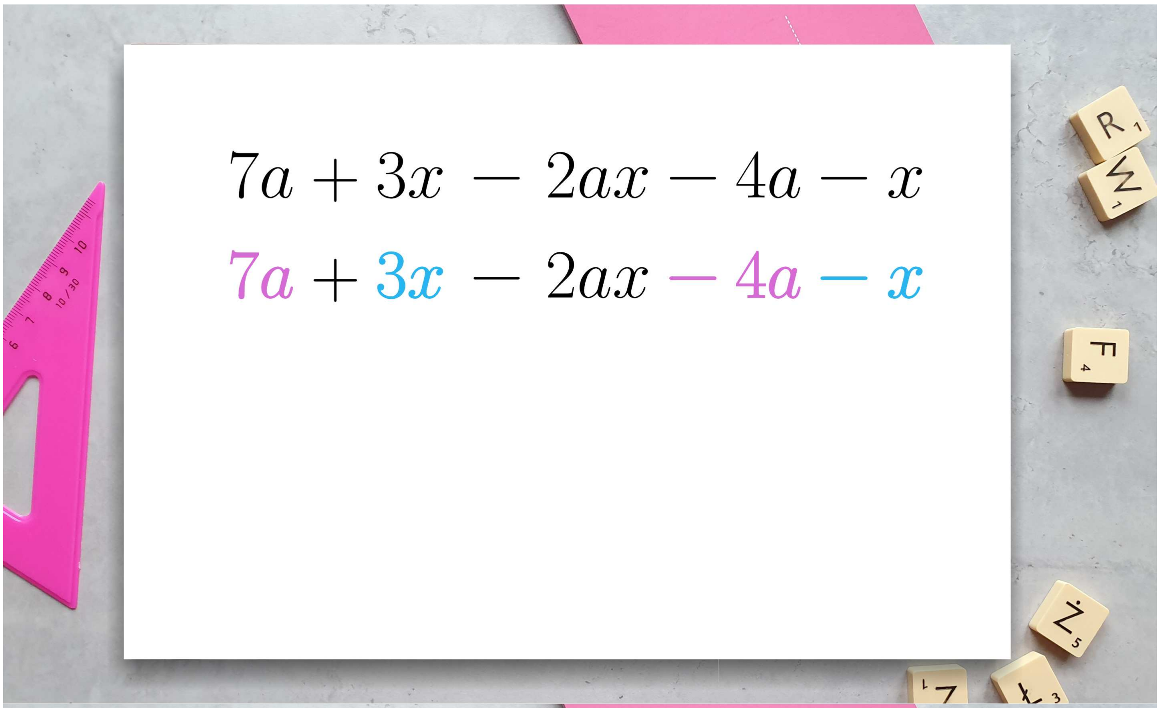
Jednomiany nazywamy **podobnymi**, gdy różnią się jedynie liczbą, a więc gdy mają te same zmienne w tych samych potęgach. Podobnymi jednomianami są więc $-2a^2b$ i πa^2b, lecz nie $2a^2$ i $2ab$.

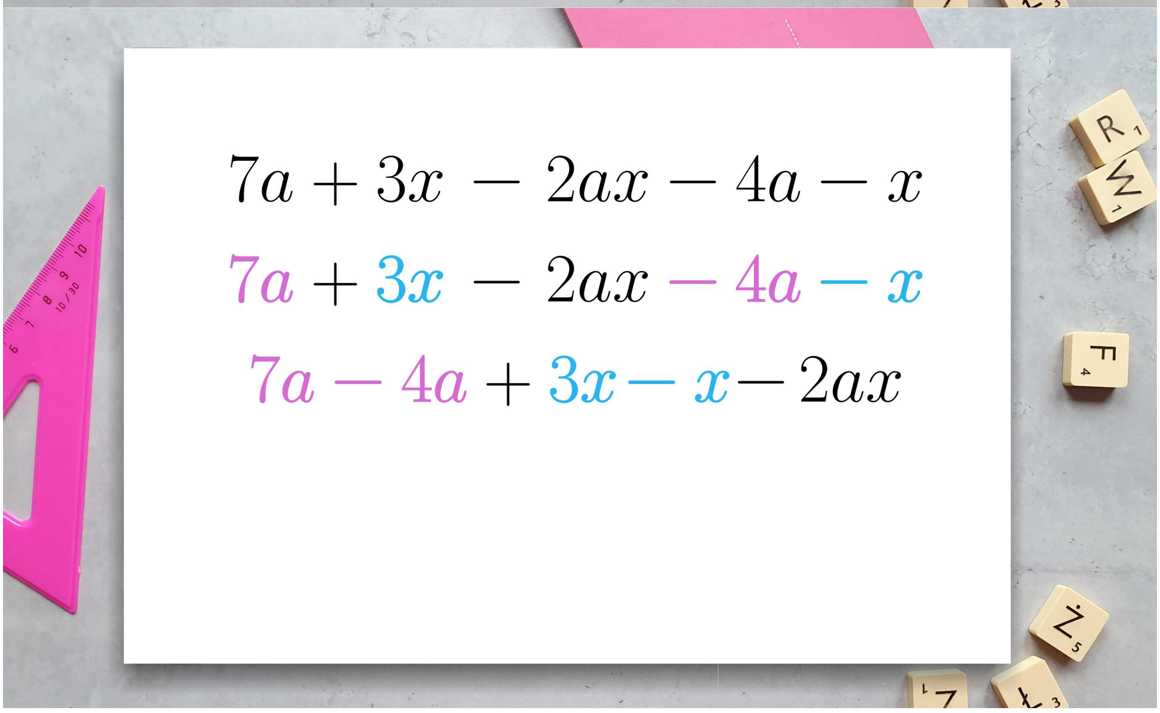
Przez **redukcję wyrazów podobnych** rozumiemy dodawanie wyrazów podobnych (np. jednomianach podobnych), aby uprościć dane wyrażenie.

Przykład 1

Wykonamy teraz redukcję wyrazów podobnych w wyrażeniu algebraicznym $7a + 3x - 2ax - 4a - x$.







Dodając wyrazy oznaczone jednakowym kolorem otrzymujemy:
$7a + 3x - 2ax - 4a - x = 3a + 2x - 2ax$.

Sumę jednomianów nazywamy sumą algebraiczną. Sumy algebraiczne możemy dodawać, odejmować, mnożyć.

Przykład 2

Dane są sumy algebraiczne: $w(x) = -5x^3 + 2x^2 - 4x + 8$ oraz
$v(x) = -6x^3 + 2x^2 - 9x - 4$

Wykonamy następujące działania: $w(x) + v(x)$; $w(x) - v(x)$; $2 \cdot w(x) - \frac{1}{2} \cdot v(x)$.

Rozwiązanie

$w(x) + v(x) = \left(-5x^3 + 2x^2 - 4x + 8\right) + \left(-6x^3 + 2x^2 - 9x - 4\right) =$

$= -5x^3 + 2x^2 - 4x + 8 - 6x^3 + 2x^2 - 9x - 4 = -11x^3 + 4x^2 - 13x + 4$

$w(x) - v(x) = \left(-5x^3 + 2x^2 - 4x + 8\right) - \left(-6x^3 + 2x^2 - 9x - 4\right) =$

$= -5x^3 + 2x^2 - 4x + 8 + 6x^3 - 2x^2 + 9x + 4 = x^3 + 5x + 12$

$2 \cdot w(x) - \frac{1}{2} \cdot v(x) = 2 \cdot \left(-5x^3 + 2x^2 - 4x + 8\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(-6x^3 + 2x^2 - 9x - 4\right) =$

$= -10x^3 + 4x^2 - 8x + 16 + 3x^3 - x^2 + \frac{9}{2}x + 2 = -7x^3 + 3x^2 - \frac{7}{2}x + 18$

Poniżej przypomnimy jak mnożyć sumy algebraiczne. Każdy składnik pierwszej sumy mnożymy kolejno przez każdy składnik drugiej sumy i otrzymane wyrażenia dodajemy.

Przykład 3

Rozważmy prosty przykład.

$$(a - b)(c - d + e) =$$

$$= a(c - d + e) - b(c - d + e) =$$

$$= ac - ad + ae - bc + bd - be$$

Wykorzystajmy teraz posiadaną wiedzę w kilku elementarnych przykładach.

Przykład 4

Cegła waży kilogram i pół cegły. Ustalimy, ile waży cegła.

Rozwiązanie:

Aby odpowiedzieć na to pytanie przyjmujemy, że cegła waży x kilogramów. Otrzymujemy wówczas równanie:

$x = \frac{1}{2}x + 1$

Po elementarnych przekształceniach otrzymujemy: $x = 2$.

Cegła waży 2 kg.

Przykład 5

W szklance znajduje się 100 ml wody. Wyznaczymy teraz ogólny wzór na ilość (ml) soli, którą należy dodać, by otrzymać roztwór p – procentowy soli.

Rozwiązanie

Jeśli dołożymy x ml soli,to procentowa zawartość soli będzie wynosić:

$p = 100 \cdot \frac{x}{100+x}$

Przekształcając mamy:

$p = \frac{100x}{100+x}$

$p \cdot (100 + x) = 100x$

$100p + px = 100x$

$100p = 100x - xp$

$100p = x(100 - p)$

$x = \frac{100p}{100-p}$

Ostatecznie, chcąc otrzymać roztwór soli o stężeniu p – procent powinniśmy dodać dokładnie $\frac{100p}{100-p} \text{ ml}$ soli.

Przykład 6

Wszyscy pracownicy pewnej firmy wykonują pewne zadanie w ciągu 3 godzin 44 minut. Gdyby pracowników było o trzech więcej, to wykonywaliby to zadanie w ciągu 2 godzin 48 minut. Wyznaczymy liczbę pracowników tej firmy.

Rozwiązanie:

Niech x oznacza liczbę pracowników firmy. Łatwo zauważyć, że jeden pracownik na samodzielne wykonanie zadanej pracy potrzebowałby x razy więcej niż x – osobowa załoga lub też $(x+3)$ razy więcej niż $(x+3)$ – osobowa ekipa. Stąd otrzymujemy równanie

$224x = 168(x+3)$,

której rozwiązanie $x=9$ jest odpowiedzią na zadane powyżej polecenie.

Słownik

jednomiany podobne

jednomiany różniące się jedynie współczynnikami liczbowymi

suma algebraiczna

suma jednomianów

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, a następnie wykonaj obliczenia z polecenia 2.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DYbylobeL

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego wyrażeń algebraicznych.

Polecenie 2

Przekształć wyrażenie $(-2x - 3y)^2 - (3x + 2y)(2x - 3y)$ do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $x = 3\sqrt{3}$, $y = 1 - \sqrt{3}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Połącz w pary wyrażenia algebraiczne z odpowiadającym im słownym zapisem.

$x^3 - y^2$	kwadrat sumy liczb x i y
$(x+y)^2$	suma kwadratów liczb x i y
$x^2 + y^2$	różnica sześcianu liczby x i kwadratu liczby y
$x^3 - y^3$	różnica sześcianów liczb x i y

Ćwiczenie 2

Liczba jednomianów podobnych wśród jednomianów $-2a$, $\frac{1}{2}a$, $3a^3$, $a\sqrt{11}$ jest równa:

- 2
- 3
- 5
- 1

Ćwiczenie 3

Umieść wyrażenia podobne w odpowiednich polach.

$2a^2$

$5ab$

$\sqrt{2}\frac{b}{a}$

$\frac{\sqrt{2}b}{7a}$ | $\frac{ab}{2}$ | $5\frac{b}{a}$ | $-\frac{1}{2}a^2$ | $7ab$ | $-7a^2$ | $\sqrt{2}a^2$ | $\frac{b}{5a}$ | $-\frac{b}{2a}$ | $-\sqrt{2}ab$

Ćwiczenie 4

Wiemy, że $x = \frac{y}{2}$ i $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$. Zatem:

- $x + y = 2y$
- $x + y = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$
- $x + y = 3x$
- $x + y = \frac{1}{x}$

Ćwiczenie 5

Różnica liczb $(n+1)^2 - 1$ i n^2 jest równa:

- $2n$
- n^2
- $-n$
- $2n^2 - 2n$

Ćwiczenie 6

Wpisz odpowiedź w puste miejsce.

Wartość liczbowa wyrażenia $2x + \sqrt[3]{(-27)} - x\sqrt[3]{(4-5)}$ jest równa 0, gdy liczba x jest równa ______.

Ćwiczenie 7

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $x + \frac{1}{y^2}$ i uzupełnij luki odpowiednimi liczbami z podanych poniżej propozycji.

Dla $x = 0,1$ i $y = 0,2$ wartość wyrażenia jest równa ______.
Dla $x = 0,2$ i $y = 0,1$ wartość wyrażenia jest równa ______.
Dla $x = 0,1$ i $y = 0,1$ wartość wyrażenia jest równa ______.
Dla $x = 0,2$ i $y = 0,2$ wartość wyrażenia jest równa ______.

$100,2$ $50,2$ $25,2$ $25,1$ $50,1$ $100,1$

Ćwiczenie 8

Wykaż, że dla liczb $a \neq 0$, $b \neq 0$ zachodzi warunek $\frac{(a^{-1}b)^{-1} : (a^2b)}{(ab^2)^{-1}} = 1$

Ćwiczenie 9

Wykaż, że dla liczb $a, b > 0$ zachodzi warunek $(a+b)^3 \geq 2a^2b + 2ab^2$.

Ćwiczenie 10

Wykaż, że dla liczb $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi warunek $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$.

Dla nauczyciela

Autor: Michał Bełdziński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyrażenia algebraiczne - powtórzenie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy. Uczeń:
2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca wyrażenia algebraiczne
- oblicza wartość liczbową wyrażeń algebraicznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;

- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat lekcji.
2. Nauczyciel określa cele i kryteria sukcesu.
3. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
2. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia numer 6, 7 i 8 po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązania ćwiczeń.

Praca domowa:

- Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Inne spojrzenie. Pojęcie wyrażenia algebraicznego”).

Materiały pomocnicze:

- Jednomiany i sumy algebraiczne

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jej treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania. Animację można wykorzystać, wprowadzając wzory skróconego mnożenia.