



## Dzielniki i wielokrotności

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Dzielniki i wielokrotności

Źródło: logan Kirschner, dostępny w internecie: [www.pexels.com](http://www.pexels.com).

Od kiedy wiesz jak wykonywać działania na ułamkach zwykłych, mniej lub bardziej świadomie używasz dzielników i wielokrotności liczb. Dzieje się to m.in. wówczas, gdy skrucasz lub dodajesz ułamki, wyłączasz czynnik przed znak pierwiastka czy rozkładasz na czynniki pierwsze.

W tej lekcji przypomnimy, rozszerzymy i uporządkujemy wiadomości o dzielnikach i wielokrotnościach.

### Twoje cele

- Wyznaczysz dzielniki dowolnej liczby naturalnej.
- Wyznaczysz wielokrotności liczb naturalnych.
- Wyznaczysz całkowite wielokrotności liczb rzeczywistych.
- Zastosujesz cechy podzielności przez wybrane liczby naturalne.

# Przeczytaj

---

## Definicja: Dzielnik liczby naturalnej

Dzielnikiem liczby naturalnej  $m$  nazywamy taką liczbę naturalną dodatnią  $d$ , dla której istnieje dokładnie jedna liczba naturalna  $k$  taka, że  $m = d \cdot k$ .

## Definicja: Dzielnik całkowity liczby całkowitej

Dzielnikiem całkowitym liczby całkowitej  $m$  nazywamy taką niezerową liczbę całkowitą  $d$ , dla której istnieje dokładnie jedna liczba całkowita  $k$  taka, że  $m = d \cdot k$ .

Zatem ilekroć będzie mowa o dzielniku, będziemy rozważać dzielnik będący liczbą naturalną.

## Przykład 1

$$3|6, \text{ bo } 6 = 2 \cdot 3$$

$$-3|12, \text{ bo } 12 = -3 \cdot (-4)$$

$$-3|(-18), \text{ bo } -18 = -3 \cdot 6$$

$$3|(-21), \text{ bo } -21 = 3 \cdot (-7)$$

Dzielniki liczby naturalnej  $m$  mniejsze od liczby  $m$  nazywamy **dzielnikami właściwymi** liczby  $m$ .

## Przykład 2

Dzielniki liczby 6 to 1, 2, 3 i 6. Dzielniki właściwe liczby 6 to 1, 2, 3.

Dzielniki liczby 28 to 1, 2, 4, 7, 14, 28. Dzielniki właściwe liczby 28 to 1, 2, 4, 7, 14.

## Ważne!

Zauważ, że suma dzielników właściwych liczb 6 i 28 jest równa tym liczbom ( $1 + 2 + 3 = 6$  oraz  $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ ). Takie liczby nazywamy **doskonałymi**.

## Przykład 3

Suma dzielników właściwych liczby 10 to  $1 + 2 + 5 = 8$ .

Suma dzielników właściwych liczby 12 to  $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$ .

Liczbę naturalną nazywamy **deficytową**, jeśli suma jej dzielników właściwych jest mniejsza niż ona sama.

Liczba 10 jest liczbą deficytową, bo wszystkie jej dzielniki właściwe to 1, 2 i 5, zaś ich suma to  $1 + 2 + 5 = 8 < 10$ .

Liczbę naturalną nazywamy **nadmiarową**, jeśli suma jej dzielników właściwych jest większa niż ona sama.

Liczba 12 jest liczbą nadmiarową, bo wszystkie jej dzielniki właściwe to 1, 2, 3, 4 i 6, zaś ich suma to  $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$ .

**Liczby zaprzyjaźnione** to para różnych *liczb naturalnych*, takich że suma *dzielników* właściwych każdej z tych liczb równa się drugiej liczbie.

## Przykład 4

Rozważmy liczby 220 i 284.

Dzielniki właściwe liczby 220 to: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, zaś ich suma to  $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ .

Dzielniki właściwe liczby 284 to: 1, 2, 4, 71, 142, zaś ich suma to  $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$ .

Oznacza to, że liczby 220 i 284 to liczby zaprzyjaźnione.

**Liczba pierwsza** to liczba naturalna, która posiada dokładnie dwa różne dzielniki: 1 i samą siebie.

#### Przykład 5

Liczba 7 jest liczbą pierwszą, ponieważ dzieli się tylko przez 1 i samą siebie.

Liczba 6 nie jest liczbą pierwszą, ponieważ dzieli się przez liczby 1, 2, 3, 6.

Liczbę naturalną, która posiada więcej niż dwa dzielniki nazywamy **liczbą złożoną**.

#### Ważne!

Zauważ, że liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani liczbami złożonymi.

Przy szukaniu dzielników liczby przydają się [cechy podzielności](#). Przypomnimy teraz kilka z nich.

Zwróćmy przy okazji uwagę na wyrażenia typu “cyfra znajdująca się w rzędzie jedności dzieli się przez 2” oraz “suma cyfr”. Cyfr nie można dodawać ani dzielić, ponieważ są to znaki graficzne do zapisywania liczb. Powyższe wyrażenia funkcjonują jako związki frazeologiczne i są skrótami odpowiednio od “liczba jednocyfrowa reprezentowana przez cyfrę znajdującą się w rzędzie jedności” oraz “suma liczb jednocyfrowych reprezentowanych przez cyfry danej liczby”.

Chociaż cechy podzielności łatwo się stosuje, to ich formalne dowody nie zawsze są proste i często wykorzystują pojęcia takie jak kongruencje (czyli przystawanie liczb modulo), które wykraczają poza program szkoły średniej.

#### Przykład 6

Wyznamy cyfrę oznaczoną literą  $x$  tak, aby liczba  $12345678x$  była podzielna przez 6.

Aby liczba była podzielna przez 6 wystarczy, aby była podzielna przez 2 i przez 3.

Z podzielności przez 2 wynika, że  $x$  jest jedną spośród liczb: 0, 2, 4, 6, 8.

Suma cyfr rozważanej liczby to  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + x = 36 + x$ .

Będzie ona podzielna przez 3, gdy  $x$  będzie równe 0, 3, 6 lub 9. Zatem jedynymi liczbami spełniającymi oba warunki są 0 i 6.

Stąd  $x = 0$  lub  $x = 6$ .

Wielokrotnością liczby naturalnej  $m$  nazywamy każdy jej iloczyn przez dodatnią liczbę naturalną  $k$ . Zatem kolejnymi wielokrotnościami liczby  $m$  są:  $m, 2m, 3m, 4m, \dots, k \cdot m, \dots$

### Ważne!

Zauważmy, że liczba naturalna ma nieskończenie wiele wielokrotności.

Całkowitą wielokrotnością liczby rzeczywistej  $x$  nazywamy każdy jej iloczyn przez liczbę całkowitą  $k$ .

### Przykład 7

Wielokrotnościami liczby 3 są liczby 3, 6, 9, 12,  $\dots$ ,  $3k$ ,  $\dots$ , gdzie  $k$  jest dodatnią liczbą naturalną.

### Przykład 8

Rozwiązując równania trygonometryczne spotkasz się z całkowitymi wielokrotnościami liczby  $\pi$ :  $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

## Słownik

## **cecha podzielności**

sposób (metoda, algorytm) umożliwiający sprawdzenie, czy jedna liczba naturalna  $d$  dzieli inną liczbę naturalną  $m$  bez wykonywania dzielenia; zwykle sprowadza się do sprawdzenia, czy inna liczba – mniejsza od liczby  $m$  – dzieli się przez  $d$ , co jest równoważne podzielności  $m$  przez  $d$

## **dzielnik liczby $m$**

liczba naturalna dodatnia  $d$  jest dzielnikiem liczby naturalnej  $m$ , gdy istnieje liczba naturalna  $k$ , dla której  $m = d \cdot k$

## **dzielnik całkowity liczby $m$**

niezerowa liczba całkowita  $d$  jest dzielnikiem całkowitym liczby całkowitej  $m$ , gdy istnieje liczba całkowita  $k$ , dla której  $m = d \cdot k$

## **wielokrotność liczby $m$**

liczba naturalna  $w$  jest wielokrotnością liczby naturalnej  $m$ , gdy istnieje dodatnia liczba naturalna  $k$ , dla której  $w = m \cdot k$

## **całkowita wielokrotność liczby $x$**

liczba rzeczywista  $w$  jest całkowitą wielokrotnością liczby  $x$ , gdy istnieje liczba całkowita  $k$ , dla której  $w = m \cdot k$

# Gra edukacyjna

---

## Polecenie 1

Sprawdź się! Przed Tobą test składający się z siedmiu pytań jednokrotnego wyboru. Powodzenia!



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1uwxJlhy>.

## Polecenie 2

Przygotuj dla koleżanki lub kolegi podobną grę. Ułóż samodzielnie 5 pytań na temat dzielników i wielokrotności.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3

Udowodnij, że liczba 496 jest liczbą doskonałą.



Ćwiczenie 4

Udowodnij, że liczby 1184 i 1210 są liczbami zaprzyjaźnionymi.



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



## Ćwiczenie 8



Znana jest cecha podzielności przez 11:

Liczba  $n$  dzieli się przez 11 dokładnie wtedy, gdy przez 11 dzieli się różnica sumy cyfr liczby  $n$  stojących na miejsca parzystych i sumy cyfr liczby  $n$  stojących na miejscach nieparzystych.

Sprawdźmy, czy liczba 981357 dzieli się przez 11.

Suma cyfr stojących na miejscach parzystych to  $5 + 1 + 9 = 15$ .

Suma cyfr stojących na miejscach nieparzystych to  $7 + 3 + 8 = 18$ .

Różnica tych sum to  $15 - 18 = -3$ .

Ponieważ  $(-3)$  nie jest podzielna przez 11, więc liczba 981357 również nie dzieli się przez 11.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Sebastian Guz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Dzielniki i wielokrotności**

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż: a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych, b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wyznacza dzielniki dowolnej liczby naturalnej.
- wyznacza wielokrotności liczb naturalnych.
- wyznacza całkowite wielokrotności liczb rzeczywistych.
- analizuje cechy podzielności przez wybrane liczby naturalne.

**Strategie nauczania:**

- strategia asocjacyjna;
- strategia problemowa.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- mapa myśli;
- dyskusja.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- rzutnik multimedialny.

## **Przebieg lekcji**

### **Przed lekcją:**

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

### **Faza wstępna:**

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Dzielniki i wielokrotności” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Gra edukacyjna” - „Gra - Milionerzy” Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania , omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

### **Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

- [Cechy podzielności liczb](#)
- [Rozkładanie liczb na czynniki pierwsze](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Gra edukacyjna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Dzielniki i wielokrotności”.