Dzielniki i wielokrotności

Dzielniki i wielokrotności

Źródło: logan Kirschner, dostępny w internecie: www.pexels.com.

Od kiedy wiesz jak wykonywać działania na ułamkach zwykłych, mniej lub bardziej świadomie używasz dzielników i wielokrotności liczb. Dzieje się to m.in. wówczas, gdy skracasz lub dodajesz ułamki, wyłączasz czynnik przed znak pierwiastka czy rozkładasz na czynniki pierwsze.

W tej lekcji przypomnimy, rozszerzymy i uporządkujemy wiadomości o dzielnikach i wielokrotnościach.

Twoje cele

- Wyznaczysz dzielniki dowolnej liczby naturalnej.
- Wyznaczysz wielokrotności liczb naturalnych.
- Wyznaczysz całkowite wielokrotności liczb rzeczywistych.
- Zastosujesz cechy podzielności przez wybrane liczby naturalne.

Przeczytaj

Definicja: Dzielnik liczby naturalnej

Dzielnikiem liczby naturalnej m nazywamy taką liczbę naturalną dodatnią d, dla której istnieje dokładnie jedna liczba naturalna k taka, że $m = d \cdot k$.

Definicja: Dzielnik całkowity liczby całkowitej

Dzielnikiem całkowitym liczby całkowitej m nazywamy taką niezerową liczbę całkowitą d, dla której istnieje dokładnie jedna liczba całkowita k taka, że $m = d \cdot k$.

Zatem ilekroć będzie mowa o dzielniku, będziemy rozważać dzielnik będący liczbą naturalną.

Przykład 1

$3|6$, bo $6 = 2 \cdot 3$

$-3|12$, bo $12 = -3 \cdot (-4)$

$-3|(-18)$, bo $-18 = -3 \cdot 6$

$3|(-21)$, bo $-21 = 3 \cdot (-7)$

Dzielniki liczby naturalnej m mniejsze od liczby m nazywamy **dzielnikami właściwymi** liczby m.

Przykład 2

Dzielniki liczby 6 to $1, 2, 3$ i 6. Dzielniki właściwe liczby 6 to $1, 2, 3$.

Dzielniki liczby 28 to $1, 2, 4, 7, 14, 28$. Dzielniki właściwe liczby 28 to $1, 2, 4, 7, 14$.

Ważne!

Zauważ, że suma dzielników właściwych liczb 6 i 28 jest równa tym liczbom ($1+2+3=6$ oraz $1+2+4+7+14=28$). Takie liczby nazywamy **doskonałymi**.

Przykład 3

Suma dzielników właściwych liczby 10 to $1+2+5=8$.

Suma dzielników właściwych liczby 12 to $1+2+3+4+6=16$.

Liczbę naturalną nazywamy **deficytową**, jeśli suma jej dzielników właściwych jest mniejsza niż ona sama.

Liczba 10 jest liczbą deficytową, bo wszystkie jej dzielniki właściwe to 1, 2 i 5, zaś ich suma to $1+2+5=8<10$.

Liczbę naturalną nazywamy **nadmiarową**, jeśli suma jej dzielników właściwych jest większa niż ona sama.

Liczba 12 jest liczbą nadmiarową, bo wszystkie jej dzielniki właściwe to 1, 2, 3, 4 i 6, zaś ich suma to $1+2+3+4+6=16>12$.

Liczby zaprzyjaźnione to para różnych *liczb naturalnych*, takich że suma *dzielników* właściwych każdej z tych liczb równa się drugiej liczbie.

Przykład 4

Rozważmy liczby 220 i 284.

Dzielniki właściwe liczby 220 to: $1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110$, zaś ich suma to $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$.

> Dzielniki właściwe liczby 284 to: 1, 2, 4, 71, 142, zaś ich suma to $1+2+4+71+142=220$.
>
> Oznacza to, że liczby 220 i 284 to liczby zaprzyjaźnione.

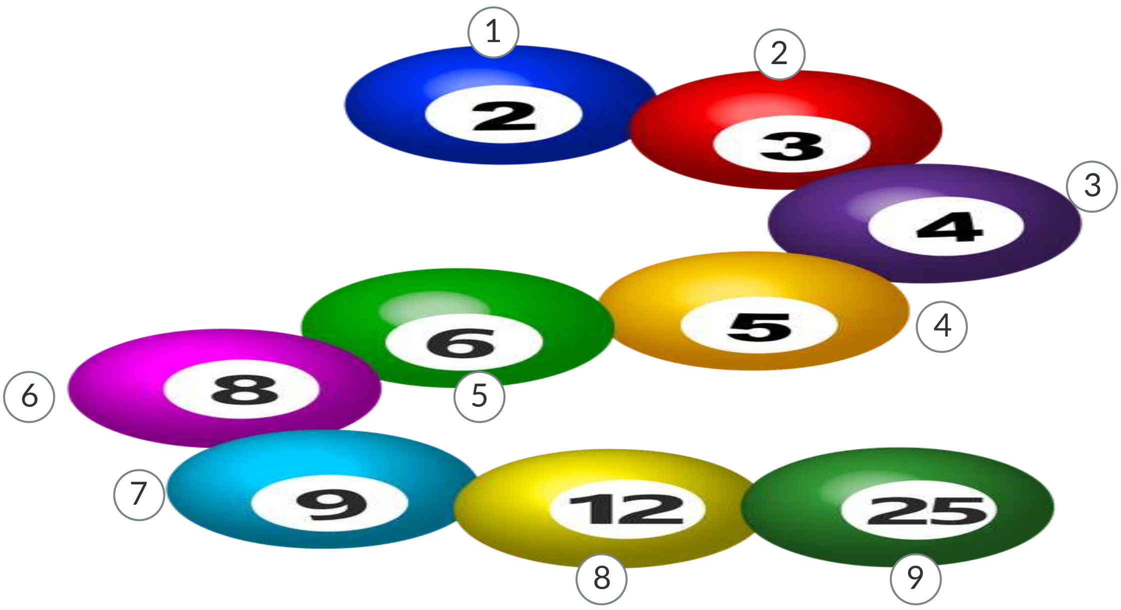
Liczba pierwsza to liczba naturalna, która posiada dokładnie dwa różne dzielniki: 1 i samą siebie.

> **Przykład 5**
>
> Liczba 7 jest liczbą pierwszą, ponieważ dzieli się tylko przez 1 i samą siebie.
>
> Liczba 6 nie jest liczbą pierwszą, ponieważ dzieli się przez liczby 1, 2, 3, 6.

Liczbę naturalną, która posiada więcej niż dwa dzielniki nazywamy **liczbą złożoną**.

> **Ważne!**
>
> Zauważ, że liczby 0 i 1 nie są ani liczbami pierwszymi, ani liczbami złożonymi.

Przy szukaniu dzielników liczby przydają się cechy podzielności. Przypomnimy teraz kilka z nich.



1

2

Liczba n dzieli się przez 2 dokładnie wtedy, gdy cyfra znajdująca się w rzędzie jedności liczby n dzieli się przez 2 (czyli w rzędzie jedności jest jedna z cyfr: $0, 2, 4, 6, 8$).

2

3

Liczba n dzieli się przez 3 dokładnie wtedy, gdy suma cyfr liczby n dzieli się przez 3.

3

4

Liczba n dzieli się przez 4 dokładnie wtedy, gdy liczba utworzona z cyfr znajdujących się w rzędzie dziesiątek i rzędzie jedności (w tej samej kolejności) liczby n dzieli się przez 4 (czyli w rzędzie dziesiątek i w rzędzie jedności znajdują się cyfry: $00, 04, 08, 12, 16, \ldots, 92, 96$).

4

5

Liczba n dzieli się przez 5 dokładnie wtedy, gdy cyfra znajdująca się w rzędzie jedności liczby n dzieli się przez 5 (czyli w rzędzie jedności jest jedna z cyfr: $0, 5$).

5

6

Liczba n dzieli się przez 6 dokładnie wtedy, gdy liczba n dzieli się przez 2 i przez 3.

6

8

Liczba n dzieli się przez 8 dokładnie wtedy, gdy liczba utworzona z cyfr znajdujących się w rzędzie setek, w rzędzie dziesiątek i w rzędzie jedności (w tej samej kolejności) liczby n dzieli się przez 8 (czyli w rzędzie setek, w rzędzie dziesiątek i w rzędzie jedności znajdują się cyfry: $008, 016, 024, 032, \ldots, 984, 992$).

7

9

Liczba n dzieli się przez 9 dokładnie wtedy, gdy suma cyfr liczby n dzieli się przez 9.

8

12

Liczba n dzieli się przez 12 dokładnie wtedy, gdy liczba n dzieli się przez 4 i przez 3.

9

25

Liczba n dzieli się przez 25 dokładnie wtedy, gdy liczba utworzona z cyfr znajdujących się w rzędzie dziesiątek i rzędzie jedności (w tej samej kolejności) liczby n dzieli się przez 25 (czyli w rzędzie dziesiątek i w rzędzie jedności znajdują się cyfry: $00, 25, 50, 75$).

Zwróćmy przy okazji uwagę na wyrażenia typu “cyfra znajdująca się w rzędzie jedności dzieli się przez 2” oraz “suma cyfr”. Cyfr nie można dodawać ani dzielić, ponieważ są to znaki graficzne do zapisywania liczb. Powyższe wyrażenia funkcjonują jako związki frazeologiczne i są skrótami odpowiednio od “liczba jednocyfrowa reprezentowana przez cyfrę znajdującą się w rzędzie jedności” oraz “suma liczb jednocyfrowych reprezentowanych przez cyfry danej liczby”.

Chociaż cechy podzielności łatwo się stosuje, to ich formalne dowody nie zawsze są proste i często wykorzystują pojęcia takie jak kongruencje (czyli przystawanie liczb modulo), które wykraczają poza program szkoły średniej.

Przykład 6

Wyznaczymy cyfrę oznaczoną literą x tak, aby liczba $12345678x$ była podzielna przez 6.

Aby liczba była podzielna przez 6 wystarcza, aby była podzielna przez 2 i przez 3.

Z podzielności przez 2 wynika, że x jest jedną spośród liczb: $0, 2, 4, 6, 8$.

Suma cyfr rozważanej liczby to $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + x = 36 + x$. Będzie ona podzielna przez 3, gdy x będzie równe $0, 3, 6$ lub 9. Zatem jedynymi liczbami spełniającymi oba warunki są 0 i 6.

Stąd $x = 0$ lub $x = 6$.

Wielokrotnością liczby naturalnej m nazywamy każdy jej iloczyn przez dodatnią liczbę naturalną k. Zatem kolejnymi wielokrotnościami liczby m są: $m, 2m, 3m, 4m, \ldots, k \cdot m, \ldots$

Ważne!

Zauważmy, że liczba naturalna ma nieskończenie wiele wielokrotności.

Całkowitą wielokrotnością liczby rzeczywistej x nazywamy każdy jej iloczyn przez liczbę całkowitą k.

Przykład 7

Wielokrotnościami liczby 3 są liczby $3, 6, 9, 12, \ldots, 3k, \ldots$, gdzie k jest dodatnią liczbą naturalną.

Przykład 8

Rozwiązując równania trygonometryczne spotkasz się z całkowitymi wielokrotnościami liczby π: $\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

Słownik

cecha podzielności

sposób (metoda, algorytm) umożliwiający sprawdzenie, czy jedna liczba naturalna d dzieli inną liczbę naturalną m bez wykonywania dzielenia; zwykle sprowadza się do sprawdzenia, czy inna liczba – mniejsza od liczby m – dzieli się przez d, co jest równoważne podzielności m przez d

dzielnik liczby m

liczba naturalna dodatnia d jest dzielnikiem liczby naturalnej m, gdy istnieje liczba naturalna k, dla której $m = d \cdot k$

dzielnik całkowity liczby m

niezerowa liczba całkowita d jest dzielnikiem całkowitym liczby całkowitej m, gdy istnieje liczba całkowita k, dla której $m = d \cdot k$

wielokrotność liczby m

liczba naturalna w jest wielokrotnością liczby naturalnej m, gdy istnieje dodatnia liczba naturalna k, dla której $w = m \cdot k$

całkowita wielokrotność liczby x

liczba rzeczywista w jest całkowitą wielokrotnością liczby x, gdy istnieje liczba całkowita k, dla której $w = m \cdot k$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Sprawdź się! Przed Tobą test składający się z siedmiu pytań jednokrotnego wyboru. Powodzenia!

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1uwxJIhy

Polecenie 2

Przygotuj dla koleżanki lub kolegi podobną grę. Ułóż samodzielnie 5 pytań na temat dzielników i wielokrotności.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Każda liczba naturalna jest swoją własną wielokrotnością.
- [ ] Liczba jeden jest dzielnikiem każdej liczby naturalnej.
- [ ] Dzielnik właściwy liczby n jest mniejszy od liczby n.
- [ ] Liczba zero nie ma dzielników.
- [ ] Liczba zero ma nieskończenie wiele dzielników.
- [ ] Liczba jeden jest dzielnikiem właściwym każdej liczby naturalnej.
- [ ] Każda całkowita wielokrotność liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

Ćwiczenie 2

Dla podanych liczb wyznacz liczbę ich dzielników i liczbę dzielników właściwych.
Wpisz prawidłowe liczby w wyznaczone miejsca. Jeśli brak wpisz "0".

Liczba x	Liczba dzielników liczby x	Liczba dzielników właściwych liczby x
1		
7		
10		
9		
8		
p^2, gdzie p jest liczbą pierwszą		
pq, gdzie p i q są liczbami pierwszymi		
p^3, gdzie p jest liczbą pierwszą		

Ćwiczenie 3

Udowodnij, że liczba 496 jest liczbą doskonałą.

Ćwiczenie 4

Udowodnij, że liczby 1184 i 1210 są liczbami zaprzyjaźnionymi.

Ćwiczenie 5

Stosując cechy podzielności rozstrzygnij, które liczby są dzielnikami danych liczb naturalnych. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Liczba 123456 jest podzielna przez:

2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 9 ☐

Liczba 135794 jest podzielna przez:

2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 9 ☐

Liczba 864205 jest podzielna przez:

2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 9 ☐

Liczba 159756 jest podzielna przez:

2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 9 ☐

Liczba 456852 jest podzielna przez:

2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 9 ☐

Liczba 72936180 jest podzielna przez:

2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 9 ☐

Liczba 951159 jest podzielna przez:

2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 9 ☐

Ćwiczenie 6

Oceń, które z poniższych zdań są fałszywe, a które prawdziwe. Przeciągnij i upuść.

Zdania prawdziwe

Zdania fałszywe

- Jeśli liczba dzieli się przez 12, to dzieli się przez 4 i przez 3.
- Jeśli liczba dzieli się przez 2 i przez 6, to dzieli się przez 12.
- Jeśli iloczyn dwóch liczb dzieli się przez 6, to przynajmniej jedna z nich dzieli się przez 6.
- Jeśli liczba dzieli się przez 2 i przez 4, to dzieli się przez 8.
- Jeśli liczba dzieli się przez 2 i przez 3, to dzieli się przez 6.
- Jeśli liczba dzieli się przez 3 i przez 6, to dzieli się przez 18.
- Jeśli liczba dzieli się przez 4 i przez 3, to dzieli się przez 12.
- Jeśli liczba dzieli się przez 6, to dzieli się przez 2 i przez 6.
- Jeśli liczba dzieli się przez 12, to dzieli się przez 2 i przez 6.

Ćwiczenie 7

Stosując cechy podzielności rozstrzygnij, które liczby są dzielnikami danych liczb naturalnych. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Liczba 123456 jest podzielna przez:

6 ☐ 12 ☐ 15 ☐ 18 ☐

Liczba 135795 jest podzielna przez:

6 ☐ 12 ☐ 15 ☐ 18 ☐

Liczba 864252 jest podzielna przez:

6 ☐ 12 ☐ 15 ☐ 18 ☐

Liczba 253890 jest podzielna przez:

6 ☐ 12 ☐ 15 ☐ 18 ☐

Liczba 1162980 jest podzielna przez:

6 ☐ 12 ☐ 15 ☐ 18 ☐

Ćwiczenie 8

Znana jest cecha podzielności przez 11:

Liczba n dzieli się przez 11 dokładnie wtedy, gdy przez 11 dzieli się różnica sumy cyfr liczby n stojących na miejsca parzystych i sumy cyfr liczby n stojących na miejscach nieparzystych.

Sprawdźmy, czy liczba 981357 dzieli się przez 11.

Suma cyfr stojących na miejscach parzystych to $5 + 1 + 9 = 15$.

Suma cyfr stojących na miejscach nieparzystych to $7 + 3 + 8 = 18$.

Różnica tych sum to $15 - 18 = -3$.

Ponieważ (-3) nie jest podzielna przez 11, więc liczba 981357 również nie dzieli się przez 11.

Zaznacz, które z podanych liczb dzielą się przez 11.

- [ ] 6261728
- [ ] 58242389
- [ ] 62133786
- [ ] 355893
- [ ] 135894
- [ ] 1057742

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dzielniki i wielokrotności

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż: a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych, b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza dzielniki dowolnej liczby naturalnej.
- wyznacza wielokrotności liczb naturalnych.
- wyznacza całkowite wielokrotności liczb rzeczywistych.
- analizuje cechy podzielności przez wybrane liczby naturalne.

Strategie nauczania:

- strategia asocjacyjna;
- strategia problemowa.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- mapa myśli;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Dzielniki i wielokrotności” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Gra edukacyjna” - „Gra - Milionerzy” Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania , omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

- Cechy podzielności liczb
- Rozkładanie liczb na czynniki pierwsze

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Gra edukacyjna” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Dzielniki i wielokrotności”.