Wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów

Wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów

Źródło: Pexels, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Matematycy to osobliwy naród – wszystko chcą upraszczać. Nie wystarczy im mnożenie wielomianów, ale jeszcze muszą wymyślać dziwne wzory, które według jednych pomagają, a według innych tylko gmatwają obliczenia algebraiczne.

Nawet Goethe zauważył, że *„Matematycy są jak Francuzi: cokolwiek im się powie, od razu przekładają to na swój własny język i wówczas staje się to zupełnie czymś innym”.*

Czy więc warto poznawać kolejny wzór skróconego mnożenia? Przekonaj się, analizując treści zawarte w tym materiale. Omówimy tu wzór na sumę sześcianów.

Johann Wolfgang von Goethe

Źródło: Gerhard von Kügelgen, dostępny w internecie: www.wikimedia.commons.org, domena publiczna.

Twoje cele

- Poznasz wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów.
- Zastosujesz wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów do przekształcania wyrażeń algebraicznych i arytmetycznych.

Przeczytaj

Kolejny wzór skróconego mnożenia który poznamy, nie jest tak łatwy do wyprowadzenia jak poprzednie. Aby uzyskać ten wzór, rozłożymy na czynniki dwumian $a^3 + b^3$. Niestety nie bardzo wiadomo jak się do tego zabrać. Nie ma tu możliwości grupowania wyrazów, ani stosowania znanych nam wzorów skróconego mnożenia, ani wyłączenia wspólnego czynnika poza nawias. Musimy więc zastosować inny „chwyt" – dodamy a^2b odejmiemy a^2b.

$$a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b + b^3$$

Grupujemy wyrazy i z pierwszej sumy wyłączamy poza nawias a^2, a z drugiej b.

$$a^3 + b^3 = a^2(a+b) - b\left(a^2 - b^2\right)$$

Różnicę $a^2 - b^2$ zapisujemy w postaci iloczynu $(a+b)(a-b)$, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów i z tak powstałego wyrażenia, wyłączamy przed nawias wspólny czynnik, czyli $(a+b)$.

$$a^3 + b^3 = a^2(a+b) - b(a+b)(a-b) = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzór na sumę sześcianów dwóch wyrażeń.

Ważne!

Wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów dwóch wyrażeń.

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

Suma sześcianów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń przez sumę kwadratów tych wyrażeń pomniejszoną o iloczyn tych wyrażeń.

Niekiedy wyrażenie $a^2 - ab + b^2$ nazywamy **niepełnym kwadratem** różnicy wyrażeń a i b. Wtedy wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów możemy zapisać słownie: *suma sześcianów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń przez niepełny kwadrat ich różnicy.*

Wyprowadzony wzór ma podobne zastosowania jak poznane wcześniej wzory skróconego mnożenia.

Korzystając ze wzoru na sumę sześcianów, można niektóre sumy zapisywać w postaci iloczynów.

Przykład 1

Zapiszemy każde z wyrażeń w postaci iloczynu.

$$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$$

$$a^3+2=\left(a+\sqrt[3]{2}\right)\left(a^2-a\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$$

$$x^6+27=\left(x^2\right)^3+3^3=\left(x^2+3\right)\left(x^4-3x^2+9\right)$$

$$8x^3+125x=(2x)^3+\left(5\sqrt[3]{x}\right)^3=\left(2x+5\sqrt[3]{x}\right)\left(4x^2-2x\cdot 5\sqrt[3]{x}+25\sqrt[3]{x^2}\right)=$$

$$=\left(2x+5\sqrt[3]{x}\right)\left(4x^2-10x\sqrt[3]{x}+25\sqrt[3]{x^2}\right)$$

Przykład 2

Przekształcimy sumy potęg na iloczyny, wykorzystując wzór na sumę sześcianów.

$$x^6+a^6=\left(x^2\right)^3+\left(a^2\right)^3=\left(x^2+a^2\right)\left(x^4-a^2x^2+a^4\right)$$

$$\tfrac{8}{27}+x^{12}=\left(\tfrac{2}{3}+x^4\right)\left(\tfrac{4}{9}-\tfrac{2}{3}x^4+x^8\right)$$

Jeżeli oba składniki sumy sześcianów poprzedzone są znakiem „$-$”, można wyłączyć (-1) przed nawias i zastosować poznany wzór skróconego mnożenia. W wyniku zmieniamy znaki otrzymanej sumy na przeciwne.

Na przykład:

$$-64-x^3y^3=-\left(64+x^3y^3\right)=-(4+xy)\left(16-4xy+x^2y^2\right)$$

Wykorzystanie wzoru na sumę sześcianów dwóch wyrażeń znacznie ułatwia przekształcanie wyrażeń algebraicznych.

Przykład 3

Zapiszemy wyrażenie $\frac{x^3+1}{x^2-1}$ w najprostszej postaci, a następnie obliczymy jego wartość dla $x=\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Licznik i mianownik podanego ułamka rozkładamy na czynniki i skracamy.

$$\tfrac{x^3+1}{x^2-1}=\tfrac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{(x+1)(x-1)}=\tfrac{x^2-x+1}{x-1}$$

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia – w miejsce x wstawiamy $\sqrt{2}$, wykonujemy wskazane działania i usuwamy niewymierność z mianownika ułamka.

$$\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{3\sqrt{2}+3-2-\sqrt{2}}{2-1}=$$

$$= 2\sqrt{2} + 1$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia jest równa $2\sqrt{2} + 1$.

Ważnym zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na sumę sześcianów jest zapisywanie iloczynu w postaci sumy.

$$(\square + \bigcirc)(\square^2 - \square\bigcirc + \bigcirc^2) = \square^3 + \bigcirc^3$$

Przykład 4

Zapiszemy iloczyny algebraiczne w postaci sum.

$$(5a+1)\left(25a^2 - 5a + 1\right) = (5a)^3 + 1^3 = 125a^3 + 1$$

$$(3x+2y)\left(9x^2 - 6xy + 4y^2\right) = (3x)^3 + (2y)^3 = 27x^3 + 8y^3$$

$$\left(\sqrt[3]{3}a + a\right)\left(\sqrt[3]{9}a^2 - \sqrt[3]{3}a^2 + a^2\right) = 3a^3 + a^3 = 4a^3$$

Wzór skróconego mnożenia na sześcian sumy można zastosować obliczając wartości wyrażeń zawierających pierwiastki.

Przykład 5

$$\left(2 + \sqrt[3]{2}\right)\left(4 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right) = 8 + 2 = 10$$

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2} + 2\right) = 1^3 + \left(\sqrt{2}\right)^3 = 1 + 2\sqrt{2}$$

Słownik

wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów

suma sześcianów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi sumy tych wyrażeń przez sumę kwadratów tych wyrażeń pomniejszoną o iloczyn tych wyrażeń

Animacja

Polecenie 1

Zapisz podane iloczyny w postaci sum, wykonując odpowiednie mnożenia.

a. $(1+m)\left(m^2-m+1\right)$,

b. $(x+2y)\left(x^2-2xy+4y^2\right)$,

c. $\left(2x^2+3x\right)\left(4x^4-6x^3+9x^2\right)$,

d. $\left(4+\sqrt{2}\right)\left(16-4\sqrt{2}+2\right)$,

Zapoznaj się z poniższą animacją i jeszcze raz zamień iloczyny na sumy – tym razem korzystając z odpowiedniego wzoru. Porównaj otrzymane wyniki.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D3dtccJJZ

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wzoru skróconego mnożenia na sumę sześcianów.

Polecenie 2

Oblicz objętość prostopadłościanu, którego wysokość jest równa $\frac{1}{2}+x$, a pole podstawy jest równe $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+x^2$, gdy $x>0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- pozna wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów
- zastosuje wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów do przekształcania wyrażeń algebraicznych i arytmetycznych
- przeanalizuje i zinterpretuje problem algebraiczny, prowadzący do zastosowania wzoru na sumę sześcianów, dobierając najefektywniejszy sposób do jego rozwiązania
- dokona analizy ukształtowanych umiejętności dotyczących wykorzystania wzorów skróconego mnożenia do przekształcaniu wyrażeń algebraicznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- rybki w akwarium
- mapa myśli

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał dostęp do komputera

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Wybrana grupa uczniów (4 - 5) w domu zapoznaje się z materiałem tak, aby mogła przekazać pozostałym uczniom pozyskane wiadomości.
2. Uczniowie powinni w domu przypomnieć sobie znane już wzory skróconego mnożenia.

Faza wstępna:

Jeden z uczniów - ochotników przypomina sposoby wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych, ze zwróceniem uwagi na wykorzystanie znanych wzorów skróconego mnożenia.

Rozpoczynając lekcję nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie pracują metodą rybki w akwarium – eksperci wyprowadzają wzór na sumę sześcianów, a następnie wspólnie oglądają animację, jednocześnie objaśniając jej najtrudniejsze elementy. Tak, aby pozostali uczniowie obserwujący „rybki” zrozumieli sposób wykorzystania wzoru na sumę sześcianów.

Następnie eksperci prezentują przykłady zadań zapisanych w sekcji Przeczytaj.

Teraz uczniowie w małych grupach rozwiązują zadania interaktywne – eksperci czuwają nad ich pracą.

Faza podsumowująca:

Uczniowie wykonują wspólnie mapę myśli, na której zaznaczają kluczowe elementy związane z dotychczas poznanymi wzorami skróconego mnożenia stopnia 3. Mapa ta pozostanie w klasie i będzie uzupełniania, w miarę poznawania nowych wzorów.

Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

Działania na wyrażeniach algebraicznych - przykłady

Działania na wyrażeniach algebraicznych - zadania

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana na następnych lekcjach wprowadzających wzór na różnicę sześcianów.