



Pierwiastki wielomianu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Pojęcie **pierwiastka** pojawia się w szkolnej matematyce dość wcześnie w kontekście arytmetycznym. Wiesz na przykład, że dla liczby rzeczywistej dodatniej a i liczby całkowitej dodatniej n symbol $\sqrt[n]{a}$ - czyli pierwiastek stopnia n z a - oznacza liczbę dodatnią, która po podniesieniu do potęgi o wykładniku n będzie równa a .

Pierwotnie, jak podaje encyklopedia *Britannica*, słowo oznaczające *korzeń* w kontekście pierwiastka z liczby pojawiło się w średniowiecznych pracach matematyków arabskich (جذر, *jidhr*) i stamtąd trafiło do łaciny jako *radix* (w języku angielskim *root*).

Liczby tej postaci w średniowieczu pojawiały się jako rozwiązania pewnych równań, przy czym w tamtych czasach równania nie były zapisywane symbolicznie, a opisywane słownie - notacja używana współcześnie ma swoje początki dopiero w piętnastym wieku. Dla przykładu liczba $\sqrt[6]{3}$ to jedyne dodatnie rozwiązanie równania $x^6 = 3$, czyli jedyne dodatnie miejsce zerowe funkcji $W(x) = x^6 - 3$.

W obecnej lekcji zobaczysz, jak pojęcie pierwiastka z liczby zostało rozszerzone i weszło do teorii wielomianów jako pierwiastek wielomianu.

Twoje cele

- Zdefiniujesz pierwiastki wielomianu.

- Obliczysz pierwiastki wielomianu w najprostszych przypadkach.

Przeczytaj

Definicja: Pierwiastek wielomianu

Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej x nazywamy liczbę x_0 taką, że $W(x_0) = 0$.

Wyznaczanie pierwiastków wielomianu może więc sprowadzić się do rozwiązywania równań postaci $W(x) = 0$.

Podstawowe wiadomości o równaniach liniowych i kwadratowych pozwalają nam bez problemu wyznaczyć pierwiastki rzeczywiste wielomianów stopnia drugiego i pierwszego.

Przykład 1

Wyznamy pierwiastki wielomianu $W(x) = \frac{2}{3}x + 7$.

- Pierwiastkami tego wielomianu są rozwiązania równania $\frac{2}{3}x + 7 = 0$.
- Jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba $(-\frac{21}{2})$.
- Zatem wielomian $W(x) = \frac{2}{3}x + 7$ ma jeden pierwiastek $x_1 = -\frac{21}{2}$.

Przykład 2

Wyznamy pierwiastki wielomianu $W(x) = 3x^2 + 7x - 11$.

- Szukamy rozwiązań równania $3x^2 + 7x - 11 = 0$.
- Stosując znane metody rozwiązywania równań kwadratowych możemy łatwo obliczyć, że wielomian ten ma dwa pierwiastki rzeczywiste: $x_1 = \frac{-7-\sqrt{181}}{6}$ oraz $x_2 = \frac{-7+\sqrt{181}}{6}$.

Ciekawostka

Warto wyszukać w *Wykładach z historii matematyki* Marka Kordosa albo w internecie informacji na temat turnieju matematycznego z 1535 roku, w którym wzięło udział dwóch włoskich matematyków: Antonio Maria del Fiore i Niccolo Tartaglia. Kluczowe znaczenie miał podczas potyczki algorytm rozwiązywania niektórych typów równań z wielomianami trzeciego stopnia, opublikowany potem przez Girolamo Cardano w dziele *Ars Magna*.

Przykład 3

Wyznamy pierwiastki wielomianu $W(x) = x^6 + 11x^4 + x^2 + 3$.

- Zauważmy, że dla dowolnego x liczby x^6 , $11x^4$ oraz x^2 są nieujemne, ponieważ są potęgami o wykładniku parzystym. Suma liczb nieujemnych oraz liczby dodatniej 3 jest zaś zawsze dodatnia. Oznacza to, że wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Przykład 4

Wykażmy, że wielomian $W(x) = x^4 - x^2 - 6x + 11$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

- Zauważmy, że

$$x^4 - x^2 - 6x + 11 = (x^4 - 2x^2 + 1) + (x^2 - 6x + 9) + 1 =$$

$$= (x^2 - 1)^2 + (x - 3)^2 + 1.$$
- Kwadrat liczby rzeczywistej nigdy nie jest ujemny, więc suma dwóch kwadratów i liczby dodatniej jest dodatnia. Wielomian zatem nigdy nie może przyjąć wartości 0, czyli nie ma pierwiastków.

Przykład 5

Czy wielomian $W(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x + 11$ ma pierwiastki rzeczywiste?

- Zauważmy, że

$$W(x) = 2x^4 - 4x^2 + x^2 - 6x + 11 = (2x^4 - 4x^2 + 2) + (x^2 - 6x + 9) =$$

$$= 2(x^2 - 1)^2 + (x - 3)^2.$$
- Wielomian można zapisać jako sumę dwóch kwadratów, czyli liczb nieujemnych. Suma taka może być równa 0 tylko, gdy

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases}.$$
- Ten warunek jest jednak sprzeczny (z drugiej równości mamy, że $x = 3$, ale jednocześnie z pierwszej równości $x^2 = 1$, co jest niemożliwe).
- Wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Słownik

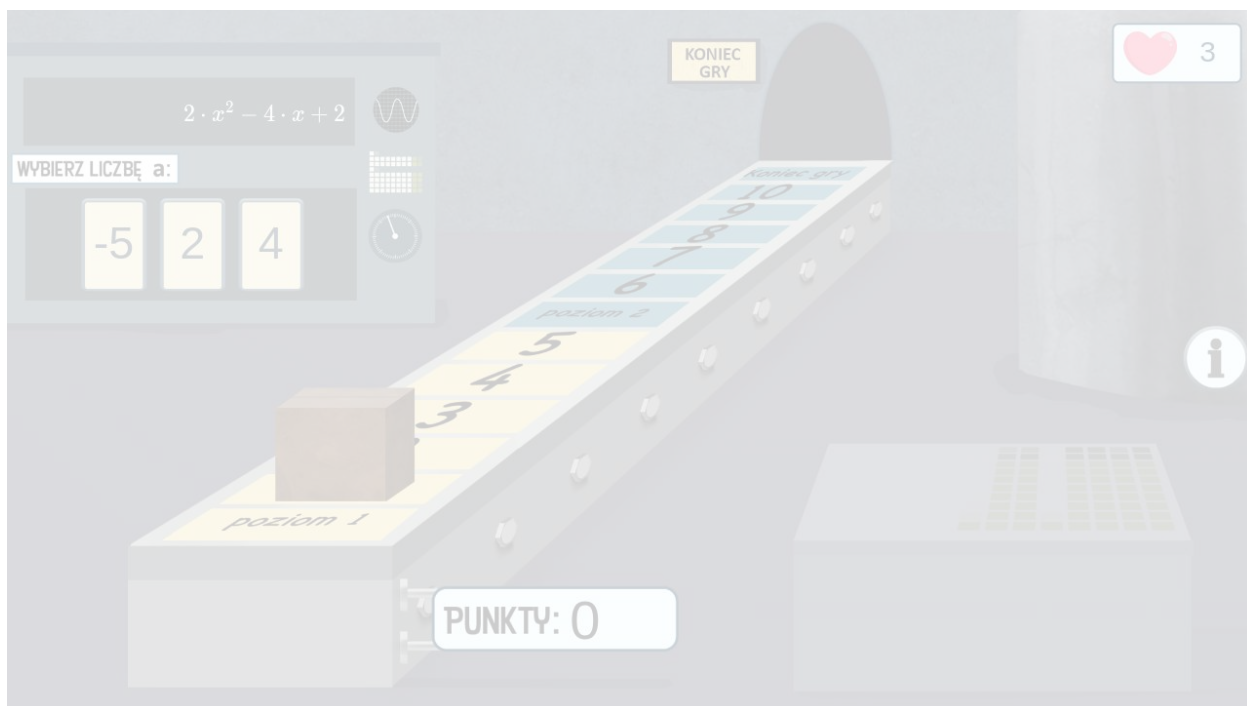
pierwiastek wielomianu

dla wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej x to liczba x_0 taka, że $W(x_0) = 0$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę. Możesz wybrać długość rozgrywki. Spróbuj zdobyć jak najwięcej punktów.





Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DNChOTAgO>

Polecenie 2

Dane są wielomiany

- $W(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$,
- $P(x) = x^9 - x^7 + x^5 - x^3$,
- $Q(x) = -6x^4 + 48x^2 + 54$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5

Wiadomo, że liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, natomiast nie jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$.

Odpowiedz na pytanie.



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pierwiastki wielomianu

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń

5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;

a ponadto:

1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje pierwiastek wielomianu,
- oblicza pierwiastki wielomianu w najprostszych przypadkach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa
- burza mózgów

- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają definicję równania z jedną niewiadomą.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami, dotyczącymi wyznaczania pierwiastków wielomianu, które przygotowali w domu.
2. Teraz uczniowie pracują w grupach 6 osobowych i omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie metodą pucharową grają w grę edukacyjną. Najpierw wyłaniają najlepszego gracza w swojej grupie, a następnie zwycięzcę w całej klasie.
4. Uczniowie w tych samych grupach rozwiązują zadania interaktywne. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące sposobu wyznaczania równania kwadratowego.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) dotyczące pierwiastków wielomianu.

Materiały pomocnicze:

[Wielomiany](#)

Wskazówki metodyczne:

Gra edukacyjna może być pracą domową dla uczniów.