Pierwiastek arytmetyczny trzeciego stopnia

Pierwiastek arytmetyczny trzeciego stopnia

Źródło: Pasja1000 z Pixabay.

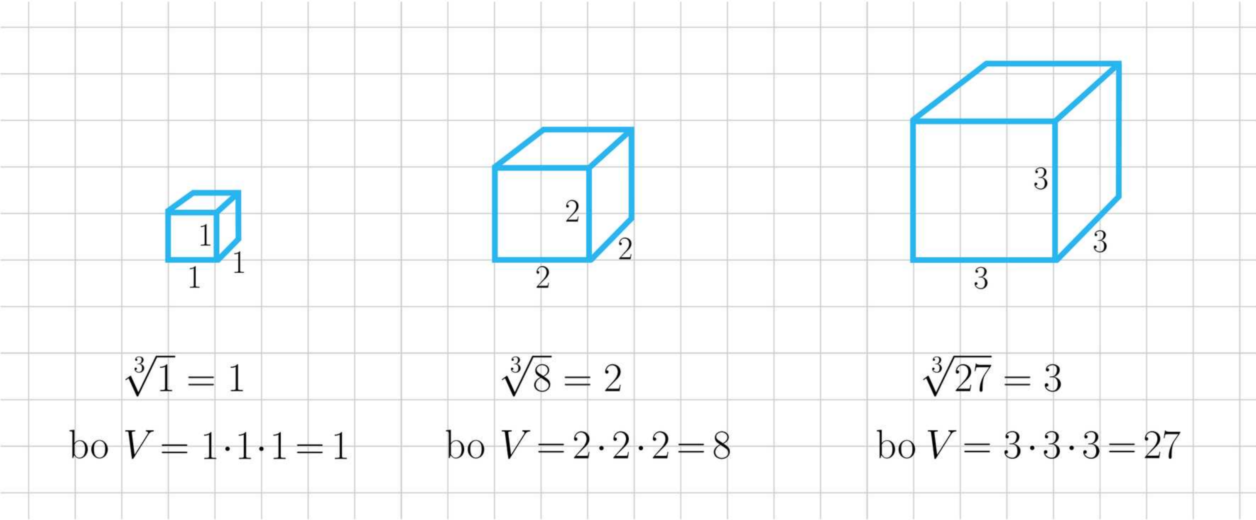
Pomimo wielu analogii między pierwiastkiem drugiego stopnia i pierwiastkiem trzeciego stopnia, na które zwrócimy uwagę w tej lekcji, jest między nimi pewna zasadnicza różnica. Podczas gdy pod pierwiastkiem kwadratowym może się znaleźć tylko i wyłącznie liczba nieujemna, pierwiastek sześcienny nie ma już takich ograniczeń. Powiemy, że dziedziną pierwiastka trzeciego stopnia jest zbiór liczb rzeczywistych.

Twoje cele

- Zastosujesz definicję pierwiastka trzeciego stopnia.
- Zastosujesz własności pierwiastkowania.
- Usuniesz niewymierność z mianownika ułamka.

Przeczytaj

Pierwiastek trzeciego stopnia (sześcienny) z dodatniej liczby a można zinterpretować jako krawędź sześcianu o objętości a.



Ta prosta i obrazowa interpretacja ma jeden defekt: uwzględnia jedynie pierwiastek sześcienny z liczby dodatniej - rzeczywiście: i krawędź, i objętość mają dodatnie miary. W praktyce okazuje się, że nic nie stoi na przeszkodzie, aby zdefiniować pierwiastek sześcienny z liczby ujemnej: $\sqrt[3]{a} = b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b^3$, dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b.

Zatem pierwiastkiem trzeciego stopnia (sześciennym) z dowolnej liczby a nazywamy taką liczbę b, która podniesiona do sześcianu daje liczbę a.

Przykład 1

$\sqrt[3]{64} = 4$, bo $4^3 = 64$

$\sqrt[3]{-8} = -2$, bo $(-2)^3 = -8$

$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$, bo $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

$\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$, bo $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$

$\sqrt[3]{-0{,}125} = -0,5$, bo $(-0,5)^3 = -0,125$

$\sqrt[3]{0} = 0$, bo $0^3 = 0$

Przykład 2

Wyrażenie $\sqrt[3]{x}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x, czyli dla $x \in \mathbb{R}$.

Zbiór wszystkich liczb, dla których dane wyrażenie zawierające zmienną x ma sens liczbowy nazywamy dziedziną wyrażenia algebraicznego. Możemy zatem powiedzieć, że dziedziną wyrażenia $\sqrt[3]{x}$ jest zbiór wszystkich liczba rzeczywistych.

Przykład 3

Ponieważ niewykonalne jest dzielenie przez 0, wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x różnej od zera.

Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x-1 \neq 0$ (uwzględniamy przy tym fakt, że mianownik nie może być równy zeru, zaś pierwiastek sześcienny jest zerem tylko wówczas, gdy zerem jest liczba podpierwiastkowa), czyli dla $x \neq 1$.

Ponieważ mianownik ułamka nie może być równy 0, wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x+2 \neq 0$, czyli dla $x \neq -2$. Wyrażenie $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$ ma sens dla każdej liczby rzeczywistej x spełniającej warunek $x^2-4 \neq 0$, czyli dla $x^2 \neq 4$. Oznacza to, że x nie może być równe ani 2, ani (-2), co możemy zapisać jako $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Przykład 4

$\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{(-3)^3} = \sqrt[3]{-27} = -3$

$\sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt[3]{(-5)^3} = \sqrt[3]{-125} = -5$

Zwróć uwagę, że niezależnie od tego, jaką liczbą jest x, prawdziwe są równości $\sqrt[3]{x^3} = x$ oraz $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$. Przy okazji odnotujmy, że równość, która jest prawdziwa dla każdego elementu dziedziny, nazywamy tożsamością.

Własności pierwiastkowania

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzą równości:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}, \text{ o ile } b \neq 0$$

Przykład 5

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

Przykład 6

Korzystając z własności pierwiastkowania usuniemy niewymierności z mianowników następujących ułamków:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$

Zwróć uwagę na kolejność wykonywania działań w wyrażeniach typu $\sqrt[3]{a^3+b^3}$. Pierwiastkowanie nie jest rozdzielne względem dodawania, więc powyższe wyrażenie nie jest równe wyrażeniu $\sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{b^3}$. Rozważmy $\sqrt[3]{2^3+1^3}$.

Poprawne obliczenie wygląda następująco $\sqrt[3]{2^3+1^3} = \sqrt[3]{8+1} = \sqrt[3]{9}$.

Ponadto $\sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{1^3} = 2 + 1 = 3$, co oczywiście nie jest równe poprawnie obliczonej wartości wyrażenia $\sqrt[3]{2^3+1^3}$, czyli liczbie $\sqrt[3]{9}$.

Przykład 7

Aby dodać pierwiastki $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16}$, możemy postąpić następująco:

$\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} + \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} == 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$.

Przypomnijmy jeszcze, że dla dowolnej liczby a zachodzi równość $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.

Słownik

pierwiastek trzeciego stopnia (sześcienny)

pierwiastkiem sześciennym z liczby a nazywamy taką liczbę b, której sześcian jest równy a, czyli $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow a = b^3$, dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b

dziedzina wyrażenia algebraicznego

zbiór tych i tylko tych liczb, dla których dane wyrażenie ma sens liczbowy

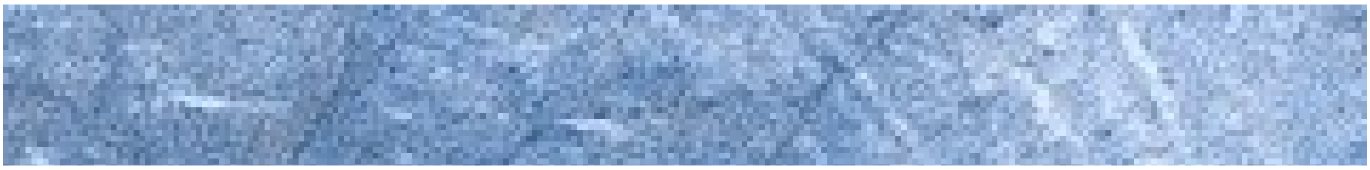
tożsamość

równość prawdziwa dla każdego elementu dziedziny

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.



Test

Pierwiastek sześcienny

Sprawdzisz:

- czy rozumiesz definicję pierwiastka sześciennego,
- czy potrafisz wykonywać przekształcenia na pierwiastkach sześciennych,
- czy potrafisz wyznaczyć dziedzinę wyrażenia algebraicznego.

Liczba pytań:

5

Limit czasu:

10 min

Twój ostatni wynik:

-

Trwa wczytywanie...

Polecenie 2

Ułóż test złożony z pięciu pytań, każde z trzema odpowiedziami. Ułożony test daj do rozwiązania koledze lub koleżance z klasy

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Rozwiąż test. Wskaż poprawną odpowiedź.

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Sprowadź do najprostszej postaci.

a) $\frac{\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{2}}$

b) $\sqrt[3]{10\sqrt{8}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt[3]{250\cdot 4}}+\sqrt[3]{-2}$

c) $\sqrt[3]{15\cdot 27+27\cdot 3+9\cdot 27}$

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Rozwiąż test. Wskaż poprawną odpowiedź. Przypomnijmy, że tożsamością nazywamy równość prawdziwą dla każdego elementu dziedziny.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pierwiastek arytmetyczny trzeciego stopnia

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;

4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje definicję pierwiastka trzeciego stopnia,
- stosuje własności pierwiastkowania,
- usuwa niewymierność z mianownika ułamka.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Pierwiastek arytmetyczny trzeciego stopnia” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z pierwiastka trzeciego stopnia i metodą – tworzenie przez analogię – opracowują algorytm pierwiastka trzeciego stopnia. A następnie porównują z odpowiednimi treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.
2. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
3. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Pierwiastki kwadratowe i sześcienne

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Test samosprawdzający” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Pierwiastek arytmetyczny trzeciego stopnia”.