Jak zbadać, czy ciąg jest arytmetyczny?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Uschi Leonhartsberger-Schrott z Pixabay, domena publiczna.

W teoriach arytmetycznych dużą rolę odgrywają ciągi, których wyrazy są różnicami kolejnych wyrazów innych ciągów liczbowych. Z własności tak tworzonych ciągów korzysta się między innymi w testach na inteligencję, budując liczby figuralne, poszukując liczb pierwszych.

Jeśli (a_n) dla $n \geq 0$ jest ciągiem liczbowym, to ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem różnic wyrazów ciągu (a_n).

Przykład tworzenia kolejnych różnic.

Ciąg (a_n) i ciągi kolejnych różnic	**Wyrazy**
$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)$	$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \ldots$
$b_n = n + 2$	$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$
$c_n = 1$	$1, 1,\ 1, 1,\ 1,\ \ldots$
$d_n = 0$	$0, 0,\ 0,\ 0, 0,\ 0,\ \ldots$

Za pomocą ciągu różnic można zbadać, czy dany ciąg jest arytmetyczny. I właśnie badaniem, czy dany ciąg jest arytmetyczny, będziemy zajmować się w tym materiale.

Twoje cele

- Rozpoznasz ciąg arytmetyczny.
- Zbadasz, czy dany ciąg jest arytmetyczny.
- Określisz zależność między ciągiem arytmetycznym a funkcją liniową.

Przeczytaj

Na początek przypomnienie definicji ciągu arytmetycznego.

Będziemy przy tym zakładać, że dany ciąg, np. ciąg (a_n), jest określony dla $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$.

> **Definicja: Ciąg arytmetyczny**
>
> **Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r, zwanej różnicą ciągu.**

Na podstawie definicji ciągu arytmetycznego wnioskujemy, że różnica między kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego jest stała.

> **Przykład 1**
>
> Sprawdzimy, czy ciąg o kolejnych wyrazach: $3, 8, 13, 19$ jest ciągiem arytmetycznym.
>
> Obliczamy różnice między kolejnymi wyrazami ciągu.
>
> $8 - 3 = 5$
>
> $13 - 8 = 5$
>
> $19 - 13 = 6 \neq 5$
>
> Nie wszystkie różnice są równe 5, zatem dany ciąg nie jest ciągiem arytmetycznym.

> **Przykład 2**
>
> Sprawdzimy, czy ciąg czterowyrazowy o kolejnych wyrazach: $10, 8, 6, 4$ jest ciągiem arytmetycznym.
>
> $8 - 10 = -2$
>
> $6 - 8 = -2$
>
> $4 - 6 = -2$
>
> W każdym przypadku różnica między kolejnymi wyrazami jest taka sama, równa (-2), zatem jest to ciąg arytmetyczny.

> **Ważne!**

> Aby zbadać, czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny, należy określić, czy różnica między każdymi kolejnymi wyrazami ciągu $(a_{n+1} - a_n)$ jest stała.

Zauważmy, że każdy **ciąg stały jest ciągiem arytmetycznym.**

> **Przykład 3**
>
> Zbadamy, czy ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3n - 1$ jest ciągiem arytmetycznym.
>
> Obliczamy cztery początkowe wyrazy ciągu.
>
> $a_1 = 2$
>
> $a_2 = 5$
>
> $a_3 = 8$
>
> $a_4 = 11$
>
> Wyznaczamy różnice między kolejnymi wyrazami ciągu.
>
> $a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$
>
> $a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$
>
> $a_4 - a_3 = 11 - 8 = 3$
>
> Różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest w każdym przypadku taka sama, równa 3. Wydaje się zatem, że jest to ciąg arytmetyczny. Jednak jest to ciąg o nieskończenie wielu wyrazach, zatem nie możemy wyznaczyć i porównać wszystkich różnic.
>
> Zatem wyznaczymy $a_{n+1} - a_n$.
>
> $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 1 - 3n + 1$
>
> $a_{n+1} - a_n = 3n + 3 - 1 - 3n + 1$
>
> $a_{n+1} - a_n = 3$
>
> Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wyznaczona różnica jest stała, nie zależy od n. Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Możemy też stwierdzić, że różnica ciągu jest równa 3.

> **Przykład 4**
>
> Pokażemy teraz, że ciąg (c_n) określony wzorem $c_n = \frac{n-1}{n+1}$ nie jest ciągiem arytmetycznym.

Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, zbadamy różnicę między kolejnymi wyrazami ciągu.

$c_{n+1} - c_n = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1}$

Sprowadzamy otrzymane wyrażenie do najprostszej postaci, wykonując odejmowanie i redukując wyrazy podobne.

$c_{n+1} - c_n = \frac{n^2+n-n^2+n-2n+2}{(n+2)(n+1)}$

$c_{n+1} - c_n = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$

Wyznaczona różnica zależy od n, zatem nie jest to ciąg arytmetyczny.

Przykład 5

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$.

Sprawdzimy, że ciąg (a_n) taki, że $a_n = f(n+1) - f(n)$ dla $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Badamy różnicę $a_{n+1} - a_n$.

$a_{n+1} - a_n = \ f(n+2) - f(n+1) - f(n+1) + f(n) =$

$= \ f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$

$a_{n+1} - a_n = a(n+2)^2 + b(n+2) + c - 2a(n+1)^2 - 2b(n+1) - 2c + an^2 +$

$+ bn + c$

Wykonujemy wskazane działania.

$a_{n+1} - a_n = an^2 + 4an + 4a + bn + 2b - 2an^2 - 4an - 2a - 2bn - 2b +$

$+ an^2 + bn$

Redukujemy wyrazy podobne.

$a_{n+1} - a_n = 2a$

Dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n badana różnica jest stała, nie zależy od n, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Przykład 6

Wiadomo, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Zbadamy, czy ciąg (c_n) określony wzorem $c_n = 7a_n - 4$ jest też ciągiem arytmetycznym.

$c_{n+1} - c_n = 7a_{n+1} - 4 - 7a_n + 4$

$c_{n+1} - c_n = 7(a_{n+1} - a_n)$

Ponieważ ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, zatem $a_{n+1} - a_n = r$, gdzie r jest pewną liczbą rzeczywistą (jest to różnica ciągu).

Zatem

$c_{n+1} - c_n = 7 \cdot r$

Wykazaliśmy, że różnica $c_{n+1} - c_n$ jest stała, nie zależy od n. Dowodzi to, że ciąg (c_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Słownik

ciąg arytmetyczny

ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r, zwanej różnicą ciągu

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Spróbuj najpierw samodzielnie wykonać zapisane tam zadania, a następnie porównaj z proponowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DI41RohkV

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej badania, czy ciąg jest ciągiem arytmetycznym.

Polecenie 2

Zbadaj, czy ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (n-1)^2 - n^2$ jest ciągiem arytmetycznym.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

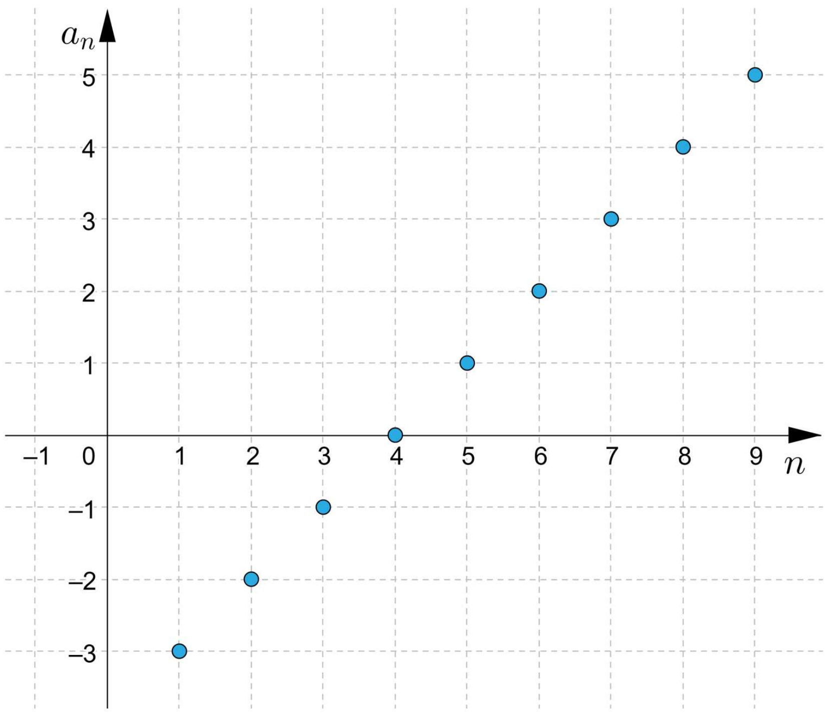
Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

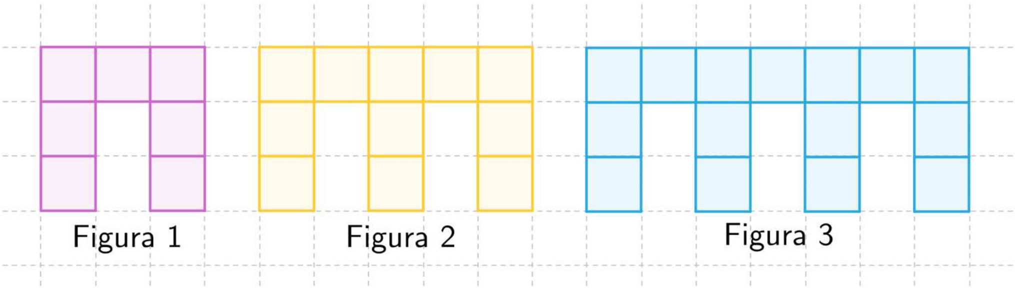
Ćwiczenie 7

Na rysunku przedstawiono kilka początkowych wyrazów pewnego ciągu. Wykaż, że jest to ciąg arytmetyczny.



Ćwiczenie 8

Kolejne figury tworzone są według pewnej reguły. Odkryj tę regułę i narysuj jeszcze kilka takich figur.



Liczby kwadratów, z których zbudowane są kolejne figury są wyrazami pewnego ciągu. Określ wzór ogólny tego ciągu, udowodnij, że jest to ciąg arytmetyczny i znajdź różnicę tego ciągu.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak zbadać, czy ciąg jest arytmetyczny?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;

5) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje ciąg arytmetyczny
- bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny
- określa z zależność między ciągiem arytmetycznym a funkcją liniową
- tworzy algorytmy ułatwiające rozpoznawanie ciągów arytmetycznych
- udowadnia proste zależności matematyczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- autosprawdzian
- klatki filmowe

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie piszą mini–kartkówkę sprawdzającą dotychczas zdobyte wiadomości na temat ciągów. Każdy uczeń sprawdza sam sobie poprawność wyników i dokonuje pisemnej samooceny.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z materiałem zamieszczonym w sekcji „Przeczytaj” i z animacją. Jednocześnie tworzą „klatki filmu” pokazującego, jak krok po kroku zbadać, czy dany ciąg jest arytmetyczny.
2. Grupy wymieniają się utworzonymi filmami i z ich pomocą rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1–4.
3. Grupy oceniają „klatki filmowe”, z których korzystali, omawiają ich wady i zalety. Autorzy najlepszego „filmu” zostają nagrodzeni (ocenami, plusami).

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie w domu ćwiczeń 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Ciąg arytmetyczny

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać na zajęciach wprowadzających pojęcie ciągu arytmetycznego lub na zajęciach pokazujących zależności między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego.