Jak zbadać, czy ciąg jest arytmetyczny?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Uschi Leonhartsberger-Schrott z Pixabay, domena publiczna.

W teoriach arytmetycznych dużą rolę odgrywają ciągi, których wyrazy są różnicami kolejnych wyrazów innych ciągów liczbowych. Z własności tak tworzonych ciągów korzysta się między innymi w testach na inteligencję, budując liczby figuralne, poszukując liczb pierwszych.

Jeśli (a_n) dla $n \geq 0$ jest ciągiem liczbowym, to ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem różnic wyrazów ciągu (a_n).

Przykład tworzenia kolejnych różnic.

Ciąg (a_n) i ciągi kolejnych różnic	Wyrazy
$a_n = \frac{1}{2}\left(n^2 + 3n + 2\right)$	$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \ldots$
$b_n = n + 2$	$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$
$c_n = 1$	$1, 1,\ 1, 1,\ 1,\ \ldots$
$d_n = 0$	$0, 0,\ 0,\ 0, 0,\ 0,\ \ldots$

Za pomocą ciągu różnic można zbadać, czy dany ciąg jest arytmetyczny. I właśnie badaniem, czy dany ciąg jest arytmetyczny, będziemy zajmować się w tym materiale.

Twoje cele

- Rozpoznasz ciąg arytmetyczny.
- Zbadasz, czy dany ciąg jest arytmetyczny.
- Określisz zależność między ciągiem arytmetycznym a funkcją liniową.

Przeczytaj

Na początek przypomnienie definicji ciągu arytmetycznego.

Będziemy przy tym zakładać, że dany ciąg, np. ciąg (a_n), jest określony dla $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$.

Definicja: Ciąg arytmetyczny

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r, zwanej różnicą ciągu.

Na podstawie definicji ciągu arytmetycznego wnioskujemy, że różnica między kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego jest stała.

Przykład 1

Sprawdzimy, czy ciąg o kolejnych wyrazach: $3, 8, 13, 19$ jest ciągiem arytmetycznym.

Obliczamy różnice między kolejnymi wyrazami ciągu.

$8 - 3 = 5$

$13 - 8 = 5$

$19 - 13 = 6 \neq 5$

Nie wszystkie różnice są równe 5, zatem dany ciąg nie jest ciągiem arytmetycznym.

Przykład 2

Sprawdzimy, czy ciąg czterowyrazowy o kolejnych wyrazach: $10, 8, 6, 4$ jest ciągiem arytmetycznym.

$8 - 10 = -2$

$6 - 8 = -2$

$4 - 6 = -2$

W każdym przypadku różnica między kolejnymi wyrazami jest taka sama, równa (-2), zatem jest to ciąg arytmetyczny.

Ważne!

> Aby zbadać, czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny, należy określić, czy różnica między każdymi kolejnymi wyrazami ciągu $(a_{n+1} - a_n)$ jest stała.

Zauważmy, że każdy **ciąg stały jest ciągiem arytmetycznym.**

> **Przykład 3**
>
> Zbadamy, czy ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 3n - 1$ jest ciągiem arytmetycznym.
>
> Obliczamy cztery początkowe wyrazy ciągu.
>
> $a_1 = 2$
>
> $a_2 = 5$
>
> $a_3 = 8$
>
> $a_4 = 11$
>
> Wyznaczamy różnice między kolejnymi wyrazami ciągu.
>
> $a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$
>
> $a_3 - a_2 = 8 - 5 = 3$
>
> $a_4 - a_3 = 11 - 8 = 3$
>
> Różnica między kolejnymi wyrazami ciągu jest w każdym przypadku taka sama, równa 3. Wydaje się zatem, że jest to ciąg arytmetyczny. Jednak jest to ciąg o nieskończenie wielu wyrazach, zatem nie możemy wyznaczyć i porównać wszystkich różnic.
>
> Zatem wyznaczymy $a_{n+1} - a_n$.
>
> $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 1 - 3n + 1$
>
> $a_{n+1} - a_n = 3n + 3 - 1 - 3n + 1$
>
> $a_{n+1} - a_n = 3$
>
> Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wyznaczona różnica jest stała, nie zależy od n. Zatem ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Możemy też stwierdzić, że różnica ciągu jest równa 3.

> **Przykład 4**
>
> Pokażemy teraz, że ciąg (c_n) określony wzorem $c_n = \frac{n-1}{n+1}$ nie jest ciągiem arytmetycznym.

Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, zbadamy różnicę między kolejnymi wyrazami ciągu.

$c_{n+1} - c_n = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1}$

Sprowadzamy otrzymane wyrażenie do najprostszej postaci, wykonując odejmowanie i redukując wyrazy podobne.

$c_{n+1} - c_n = \frac{n^2+n-n^2+n-2n+2}{(n+2)(n+1)}$

$c_{n+1} - c_n = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$

Wyznaczona różnica zależy od n, zatem nie jest to ciąg arytmetyczny.

Przykład 5

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$.

Sprawdzimy, że ciąg (a_n) taki, że $a_n = f(n+1) - f(n)$ dla $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Badamy różnicę $a_{n+1} - a_n$.

$a_{n+1} - a_n = \ f(n+2) - f(n+1) - f(n+1) + f(n) =$

$= \ f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$

$a_{n+1} - a_n = a(n+2)^2 + b(n+2) + c - 2a(n+1)^2 - 2b(n+1) - 2c + an^2 +$

$+ bn + c$

Wykonujemy wskazane działania.

$a_{n+1} - a_n = an^2 + 4an + 4a + bn + 2b - 2an^2 - 4an - 2a - 2bn - 2b +$

$+ an^2 + bn$

Redukujemy wyrazy podobne.

$a_{n+1} - a_n = 2a$

Dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n badana różnica jest stała, nie zależy od n, zatem ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Przykład 6

Wiadomo, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Zbadamy, czy ciąg (c_n) określony wzorem $c_n = 7a_n - 4$ jest też ciągiem arytmetycznym.

$c_{n+1} - c_n = 7a_{n+1} - 4 - 7a_n + 4$

$c_{n+1} - c_n = 7(a_{n+1} - a_n)$

Ponieważ ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, zatem $a_{n+1} - a_n = r$, gdzie r jest pewną liczbą rzeczywistą (jest to różnica ciągu).

Zatem

$c_{n+1} - c_n = 7 \cdot r$

Wykazaliśmy, że różnica $c_{n+1} - c_n$ jest stała, nie zależy od n. Dowodzi to, że ciąg (c_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Słownik

ciąg arytmetyczny

ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r, zwanej różnicą ciągu

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Spróbuj najpierw samodzielnie wykonać zapisane tam zadania, a następnie porównaj z proponowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DI41RohkV

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej badania, czy ciąg jest ciągiem arytmetycznym.

Polecenie 2

Zbadaj, czy ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (n-1)^2 - n^2$ jest ciągiem arytmetycznym.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz poprawną odpowiedź. Aby zbadać, czy ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{3n+6}{3}$ jest arytmetyczny, należy zbadać różnicę:

- $a_{n+1} - a_n$.
- $\frac{a_3+a_1}{2}$.
- $a_2 - a_1$.
- $\sqrt{a_2 - a_1}$.

Ćwiczenie 2

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 1 + \frac{n-2}{n+1}$. Wskaż wyrazy ciągu, które w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Zaznacz prawidłową odpowiedź.

- $a_2,\ a_3,\ a_4$.
- $a_1,\ a_3,\ a_5$.
- $a_1,\ a_2,\ a_3$.
- $a_1,\ a_2,\ a_5$.

Ćwiczenie 3

Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie wyrażenia.

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem $a_n = $ ______.
Przekształcając wzór ciągu, otrzymujemy $a_n = $ ______.
Wynika z tego, że punkty należące do wykresu ciągu, leżą na wykresie funkcji liniowej $y = $ ______, gdzie $b = $ ______. Różnica ciągu równa ______ jest współczynnikiem kierunkowym prostej, na której leży wykres ciągu.

$rx + b$ | r | $a_1 - r$ | $nr + (a_1 - r)$ | $a_1 + (n-1) \cdot r$

Ćwiczenie 4

Przeciągnij w odpowiednie miejsca wzór każdego z ciągów.

Ciągi arytmetyczne

Ciągi, które nie są arytmetyczne

$d_n = \frac{10-5n}{3}$ | $b_n = n^3$ | $a_n = -9$ | $w_n = (n-1)(n+2)$ | $k_n = (n-1)(n+1) -(n+2)(n-2)$ | $c_n = \sqrt{7+n}$

Ćwiczenie 5

Uzupełnij zdanie, wpisując odpowiednią liczbę.

Liczby $3x + 2$, $x^2 + 1$, $7x$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, zatem $x = $ ______.

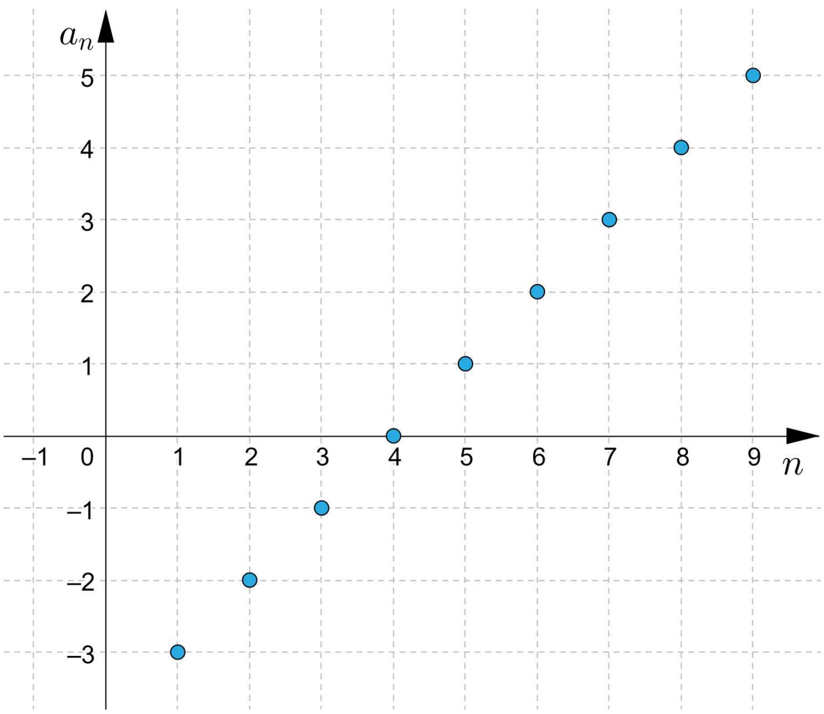
Ćwiczenie 6

Niech (a_n) i (b_n) będą ciągami arytmetycznymi o różnicach odpowiednio r i R. Zaznacz, które stwierdzenie jest prawdziwe, a które fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Ciąg $c_n = 2a_n + b_n$ jest ciągiem arytmetycznym.	○	○
Ciąg $d_n = a_n \cdot b_n$ jest ciągiem arytmetycznym.	○	○
Ciąg $k_n = \frac{b_n}{a_n}$ jest ciągiem arytmetycznym.	○	○
Ciąg $t_n = b_n - 6$ jest ciągiem arytmetycznym.	○	○

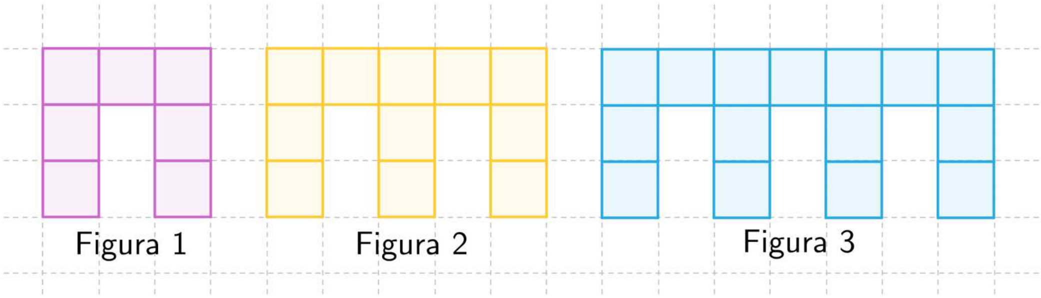
Ćwiczenie 7

Na rysunku przedstawiono kilka początkowych wyrazów pewnego ciągu. Wykaż, że jest to ciąg arytmetyczny.



Ćwiczenie 8

Kolejne figury tworzone są według pewnej reguły. Odkryj tę regułę i narysuj jeszcze kilka takich figur.



Liczby kwadratów, z których zbudowane są kolejne figury są wyrazami pewnego ciągu. Określ wzór ogólny tego ciągu, udowodnij, że jest to ciąg arytmetyczny i znajdź różnicę tego ciągu.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak zbadać, czy ciąg jest arytmetyczny?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;

5) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje ciąg arytmetyczny
- bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny
- określa z zależność między ciągiem arytmetycznym a funkcją liniową
- tworzy algorytmy ułatwiające rozpoznawanie ciągów arytmetycznych
- udowadnia proste zależności matematyczne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- autosprawdzian
- klatki filmowe

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie piszą mini–kartkówkę sprawdzającą dotychczas zdobyte wiadomości na temat ciągów. Każdy uczeń sprawdza sam sobie poprawność wyników i dokonuje pisemnej samooceny.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z materiałem zamieszczonym w sekcji „Przeczytaj" i z animacją. Jednocześnie tworzą „klatki filmu" pokazującego, jak krok po kroku zbadać, czy dany ciąg jest arytmetyczny.
2. Grupy wymieniają się utworzonymi filmami i z ich pomocą rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1–4.
3. Grupy oceniają „klatki filmowe", z których korzystali, omawiają ich wady i zalety. Autorzy najlepszego „filmu" zostają nagrodzeni (ocenami, plusami).

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie w domu ćwiczeń 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się".

Materiały pomocnicze:

Ciąg arytmetyczny

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać na zajęciach wprowadzających pojęcie ciągu arytmetycznego lub na zajęciach pokazujących zależności między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego.