

# PAKIET MATERIAŁÓW DYDAKTYCZNYCH

do kształcenia na odległość –

III etap edukacyjny –

matematyka

Województwo Łódzkie –

Centrum Rozwoju Edukacji WŁ w Skierniewicach

Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Skierniewicach

Projekt „Wsparcie placówek doskonalenia nauczycieli i bibliotek pedagogicznych w realizacji zadań związanych z przygotowaniem i wsparciem nauczycieli w prowadzeniu kształcenia na odległość”

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Materiał opracowany w ramach grantu przez Centrum Rozwoju Edukacji WŁ w Skierniewicach Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Skierniewicach

## SCENARIUSZ 1

**SCENARIUSZ ZAJĘĆ DLA:** uczniów szkoły ponadpodstawowej III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy

**PROWADZONYCH PRZEZ:** nauczyciela matematyki

### TEMAT:

Równania wymierne z jedną niewiadomą.

### CELE KSZTAŁCENIA - WYMAGANIA OGÓLNE: (PODSTAWA PROGRAMOWA)

Równania i nierówności. Zakres podstawowy. Uczeń:

Rozwiązuje równania wymierne  $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$ , gdzie wielomiany  $V(x)$  i  $W(x)$  są zapisane w postaci iloczynowej.

### TREŚCI NAUCZANIA - WYMAGANIA SZCZEGÓŁOWE: (PODSTAWA PROGRAMOWA) Uczeń:

- rozpoznaje równania wymierne z jedną niewiadomą;
- wyznacza dziedzinę równania wymiernego
- określa, która z podanych liczb nie należy do dziedziny równania wymiernego
- rozwiązuje równania wymierne typu  $(V(x))/(W(x))=0$ , podaje i uwzględnia odpowiednie założenia;
- rozwiązuje równania wymierne stosując wzory skróconego mnożenia i podaje odpowiednie założenia;
- stosuje działania na wyrażeniach wymiernych.

### Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

## **METODY PRACY:**

- praca zdalna
- dyskusja kierowana
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji oraz filmu
- praca z komputerem, tabletem lub smartfonem
- praca z tabletem graficznym
- metoda lekcji odwróconej.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego.

## **ŚRODKI DYDAKTYCZNE:**

- komputer, smartfon
- zasoby multimedialne zawarte w e-podręcznikach (platforma zge.gov.pl) oraz w zasobach zgodnych z postawą programową z matematyki na portalu <https://pistacja.tv/> [dostęp: 25.01.2022]
- tablet graficzny
- ćwiczenia interaktywne

## **PRZEWIDYWANY CZAS:**

45 minut

## **PROPONOWANY PRZEBIEG ZAJĘĆ:**

### **Faza przygotowawcza**

**Cel fazy przygotowawczej:** wprowadzenie w tematykę zajęć,

1. Nauczyciel poleca, aby uczniowie dzień wcześniej przed lekcją przypomnieli sobie pojęcie proporcjonalności odwrotnej, jest to nawiązanie do pojęcia wprowadzonego w szkole podstawowej, w tym celu uczniowie mają obejrzeć lekcję w postaci filmu na portalu pistacja.tv <https://pistacja.tv/film/mat00375-proporcja-odwrotna?playlist=573> [dostęp: 25.01.2022] oraz aby uczniowie zapoznali się z materiałem o równaniach wymiernych z jedną niewiadomą na

platformie <https://zpe.gov.pl/a/wprowadzenie/D18QbIwUX> [dostęp: 25.01.2022]

Linki do wymienionych materiałów zamieszcza w zakładce prace domowe w dzienniku elektronicznym lub we wpisach dla grupy lub materiałach z zajęć na platformie MS Teams (ustalając wcześniej z uczniami sposób przekazywania informacji). Istotnym elementem wcześniejszego zapoznania z materiałem lekcji jest możliwość swobodnej analizy treści, wielokrotnego powtarzania prezentacji i oswojenie się z nowymi pojęciami.

## **2. Informacje / instrukcje / wskazówki techniczne do pracy zdalnej dla nauczyciela.**

Nauczyciel przed lekcją online łączy się z uczniami korzystając z platformy MS Teams lub innej wykorzystywanej przez szkołę. Pomocny w pracy online jest tablet graficzny, który daje możliwość zapisywania w czasie rzeczywistym wiadomości dotyczących lekcji i udostępniania ich uczniom w czasie zajęć. Dba o zapewnienie uczniom dostępu do materiałów źródłowych. Zaleca uczniom aktywny udział w zajęciach połączony z tworzeniem notatek. Prezentacja materiałów multimedialnych powinna być połączona z objaśnieniami nauczyciela. Uczniowie zdolni powinni mieć możliwość wykazania się wiedzą w zakresie omawianego tematu, wyjaśniając pojęcia nowe lub znane. Uczniowie ze zróżnicowanymi potrzebami rozwojowymi powinni mieć możliwość skorzystania z kilkuminutowego wydłużenia czasu pracy, częstych powtórek słownych, zaznaczania kolorem istotnych zapisów, pochwały dla podejmowanego przez ucznia wysiłku.

## **3. Informacje / instrukcje / wskazówki techniczne do pracy zdalnej dla ucznia.**

Uczniowie przed lekcją online łączą się z nauczycielem korzystając z platformy MS Teams lub innej wykorzystywanej przez szkołę. Po sprawdzeniu obecności zapisują w zeszytach temat lekcji, dbają o tworzenie własnych notatek, które będą cenną pomocą przy rozwiązywaniu zadań domowych, quizów lub testów oraz przygotowaniach do powtórzenia przed sprawdzianami.

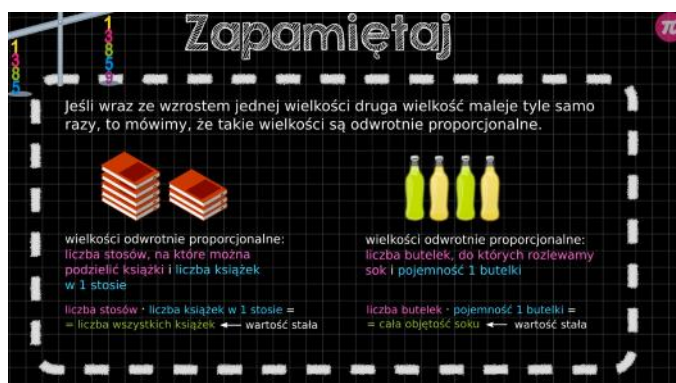
## Faza zasadnicza

### Cel fazy zasadniczej:

Po zrealizowaniu bieżącego tematu uczeń będzie potrafił:

- rozpoznać równania wymierne z jedną niewiadomą,
- wyznaczyć dziedzinę równania wymiernego,
- określić, która z podanych liczb nie należy do dziedziny równania wymiernego,
- rozwiązać proste równania wymierne, podać i uwzględnić odpowiednie założenia.

4. **Faza realizacji** rozpoczyna się od sprawdzenia obecności przez nauczyciela. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu. Zadaje pytania powtórzeniowe odnośnie pojęcia proporcjonalności odwrotnej (cel filmu oglądanego przez uczniów poprzedniego dnia) i prosi o udzielenie odpowiedzi.



Rysunek 1 Zrzut z ekranu, podsumowanie filmu, (źródło: <https://pistacja.tv/film/mat00375-proporcja-odwrotna?playlist=573> [dostęp: 25.01.2022])

Nauczyciel zwraca uwagę na poprawność i precyzję odpowiedzi oraz odpowiedzi uczniów ze zróżnicowanymi potrzebami rozwojowymi. Nauczyciel zgodnie z celami lekcji wprowadza temat, udostępnia okno z uruchomionym tematem na Zintegrowanej Platformie Edukacyjnej <https://zpe.gov.pl/a/wprowadzenie/D18QbIwUX> [dostęp: 25.01.2022], z którym uczniowie mieli się zapoznać wcześniej.

5. Wspólnie z uczniami analizuje wprowadzenie do tematu i stopień zrozumienia zmieszczonych w temacie pięciu przykładowych rozwiązań równań wymiernych.

**Przykład 1** (źródło <https://zpe.gov.pl/a/przeczytaj/D188bQfCM> [dostęp: 25.01.2022])

Określmy dziedzinę równania  $\frac{x+2}{x^3-x} = 0$

Niech  $P(x) = x^3 - x$

Obliczmy pierwiastki wielomianu  $P(x)$

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = -1$$

Ponieważ dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych pomniejszony o zbiór pierwiastków wielomianu  $P(x)$ , zatem  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

Dziedziną równania jest  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

**Przykład 2** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/przeczytaj/D188bQfCM> [dostęp: 25.01.2022])

Określmy, która z liczb -2, -1, 0, 1, 2, 4 nie należy do dziedziny równania  $\frac{x}{x^2-5x+4} = 0$

Wyznaczymy dziedzinę równania  $x^2 - 5x + 4 \neq 0$

$$(x - 1)(x - 4) \neq 0$$

$$x \neq 1 \text{ i } x \neq 4$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$$

Czyli  $x = 1 \notin D$

$$x = 4 \notin D$$

Liczby 1 i 4 nie należą do dziedziny równania.

**Przykład 3** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/przeczytaj/D188bQfCM> [dostęp: 25.01.2022])

Rozwiążemy równanie  $\frac{x+3}{x(x+2)} = 0$

Określmy najpierw dziedzinę równania.

$$x(x+2) \neq 0$$

$$x \neq 0 \text{ i } x \neq -2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$$

Wyznamy teraz te wartości  $x$ , dla których wielomian  $W(x) = x + 3$  przyjmuje wartość równą zero.

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Rozwiązanie równania to liczba  $\{-3\}$

**Przykład 4** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/przeczytaj/D188bQfCM> [dostęp: 25.01.2022])

Rozwiążemy równanie  $\frac{x}{x^2-5} = 2$

Określmy dziedzinę równania:

$$x^2 - 5 \neq 0$$

$$x \neq \sqrt{5} \text{ i } x \neq -\sqrt{5}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

Korzystając z własności proporcji mamy:

$$x = (x^2 - 5) \cdot 2$$

$$x = 2x^2 - 10$$

$$2x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 1 + 80 = 81 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 9$$

$$x_1 = \frac{1 - 9}{4} = -2 \in \mathbf{D}$$

$$x_2 = \frac{1 + 9}{4} = \frac{5}{2} \in \mathbf{D}$$

Rozwiązanie równania to:  $x = 2$ ,  $x = \frac{5}{2}$ .

**Przykład 5** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/przeczytaj/D188bQfCM> [dostęp: 25.01.2022])

Wykażemy, że równanie  $\frac{4x^2+4x+1}{2x+1} = 0$  jest sprzeczne

Wyznaczymy najpierw dziedzinę równania:

$$2x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -\frac{1}{2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

Przyrównujemy licznik ułamka algebraicznego do zera.

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

Zauważmy, że korzystając ze wzoru skróconego mnożenia mamy:

$$(2x + 1)^2 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Ale  $-\frac{1}{2} \notin D$ , więc równanie nie ma rozwiązania.

- Następnie wspólnie z uczniami ogląda galerię zdjęć interaktywnych zawierających opis sposobów rozwiązania równania wymiernego z jedną niewiadomą, wyjaśniając jednocześnie, na czym polegają istotne etapy rozwiązania równania.

**Przykład** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/galeria-zdjec-interaktywnych/DFZV4bu1b> [dostęp: 25.01.2022])

Obejrzyj i przeanalizuj sposoby rozwiązania równania wymiernego z uwzględnieniem dziedziny równania

Rozwiążemy równanie wymierne  $\frac{x^2-3x}{x^2+2x} = 0$

### Sposób I

Określimy dziedzinę równania

$$x^2 + 2x \neq 0$$



$$x(x + 2) \neq 0$$



$$x \neq 0 \text{ i } x \neq -2$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$$

2

7. W ramach posumowania przeanalizowanych rozwiązań, nauczyciel prosi uczniów o wyodrębnienie etapów rozwiązania równania wymiernego. Po przeanalizowaniu zgłoszonych przez uczniów propozycji, prosi uczniów o zapisanie w zeszytach sformułowanych etapów:

Rozwiązanie równania wymiernego  $\frac{V(x)}{W(x)} = 0$  składa się z etapów:

- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu **W** i przyjęcie założeń, określenie dziedziny, jako zbioru liczb rzeczywistych bez miejsc zerowych wielomianu **W**,
- wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu **V**,
- uwzględnienie założeń i sformułowanie odpowiedzi.

8. Nauczyciel upewnia się, czy wszyscy uczniowie zapisali w zeszytach etapy rozwiązania równania, zwraca uwagę, aby stosować kolejne etapy podczas rozwiązywania równań wymiernych.

9. W kolejnym etapie lekcji nauczyciel proponuje rozwiązanie zadań interaktywnych, aby sprawdzić stopień zrozumienia i opanowania umiejętności rozwiązania równania wymiernego. W tym celu prezentuje kolejno ćwiczenia 1-6 zamieszczone w części sprawdź się. Po wyświetleniu ćwiczenia uczniowie po chwili zastanowienia się zgłaszają się do odpowiedzi. Nauczyciel nagradza uczniów wykonujących ćwiczenia ocenami za aktywność.

**Ćwiczenie 1** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/sprawdz-sie/DxR4s84mr> [dostęp: 25.01.2022])

Wyznacz dziedzinę równania  $\frac{x}{x(x^2-6x+5)} = 0$ . Zaznacz poprawną odpowiedź

- $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$
- $\mathbb{R} \setminus \{-5, -1, 0\}$
- $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
- $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 5\}$

**Ćwiczenie 2** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/sprawdz-sie/DxR4s84mr> [dostęp: 25.01.2022])

Zaznacz wszystkie liczby, które nie należą do dziedziny równania  $\frac{x^2-9}{x(x^2-3)(x^2-x-6)} = 0$

- 2
- $-\sqrt{3}$
- $\sqrt{3}$
- 2
- 3
- 0
- 3

**Ćwiczenie 3** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/sprawdz-sie/DxR4s84mr> [dostęp: 25.01.2022])

Rozwiąż równanie  $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} = 0$ . Wybierz liczbę rozwiązań równania. Wskaż poprawną odpowiedź.

- 1
- 3
- 0
- 2

**Ćwiczenie 4** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/sprawdz-sie/DxR4s84mr> [dostęp: 25.01.2022])

Dane jest równanie  $\frac{x(x+1)(2x+4)}{x} = 0$ . Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- Rozwiązaniem równania są liczby  $x = -2$ ,  $x = -1$ .
- Jest to równanie wielomianowe.
- Dziedziną równania jest  $\mathbb{R}$ .
- Jest to równanie wymierne z jedną niewiadomą.
- Rozwiązaniem równania są  $x = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = -2$

**Ćwiczenie 5** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/sprawdz-sie/DxR4s84mr> [dostęp: 25.01.2022])

Rozwiąż równanie  $\frac{x^2-3x-2}{x-1} = 0$ . Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

x =

**Ćwiczenie 6** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/sprawdz-sie/DxR4s84mr> [dostęp: 25.01.2022])

Przeciągnij odpowiednie wyrażenie

Równanie  $\frac{9x^2-12x+4}{3x-2} = 0$  jest

tożsamościowe

wielomianowe

sprzeczne

10. Na zakończenie lekcji nauczyciel zadaje pracę domową, będzie to równanie zamieszczone pod galerią zdjęć interaktywnych.

**Polecenie 2** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/galeria-zdjec-interaktywnych/DFZV4bu1b> [dostęp: 25.01.2022])

Rozwiąż równanie  $\frac{x^2-16}{x^2+4x} = 0$  na dwa sposoby. Pamiętaj o uwzględnieniu dziedziny równania.

oraz zadania dla chętnych ćwiczenia 7, 8 z części sprawdź się.

**Ćwiczenie 7** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/sprawdz-sie/DxR4s84mr> [dostęp: 25.01.2022])

Dane jest równanie  $\frac{x}{x-1} = 2$  dla  $x \neq 1$ . Wskaż równanie równoważne do danego.

$\frac{-x}{1-x} = 0$

$\frac{x-x}{x-1} = 0$

$\frac{1-x}{x-1} = 0$

$\frac{2}{x-1} = 0$

**Ćwiczenie 8** (źródło: <https://zpe.gov.pl/a/sprawdz-sie/DxR4s84mr> [dostęp: 25.01.2022])

Dane jest równanie  $\frac{x^2-8x+16}{x+m} = 0$ ,  $x \neq -m$  z niewiadomą x. Dla jakiego m równanie jest sprzeczne? Wpisz w wyznaczone miejsce odpowiednią liczbę.

m =

## EWALUACJA ZAJĘĆ

Nauczyciel podsumowuje pracę uczniów w zakresie wykonanych ćwiczeń sprawdzających i udziela informacji zwrotnej, w jakim stopniu uczniowie osiągnęli cel lekcji i udziela wskazówek do dalszej pracy. Prosi uczniów o udzielenie odpowiedzi na pytania nauczyciela. Czy zrozumiałe są dla Ciebie etapy rozwiązania równania wymiernego? Co było dla Ciebie najważniejsze na dzisiejszej lekcji? Uczniowie odpowiadają na czacie grupowym. Nauczyciel analizuje udzielone odpowiedzi i wyciąga wnioski.

Na zakończenie nauczyciel dziękuje za udział i aktywność na lekcji, przypomina o pracy domowej. Żegna się z uczniami kończąc lekcję.

## BIBLIOGRAFIA

- <https://zpe.gov.pl/a/wprowadzenie/D18QblwUX> [dostęp: 25.01.2022]
- <https://zpe.gov.pl/a/proporcjonalnosc-odwrotna/DUel8NY8a> [dostęp: 25.01.2022]
- <https://pistacja.tv/film/mat00375-proporcja-odwrotna?playlist=573> [dostęp: 25.01.2022]