

PAKIET MATERIAŁÓW DYDAKTYCZNYCH

do kształcenia na odległość dla nauczycieli
matematyki szkół ponadpodstawowych

Projekt „Wsparcie placówek doskonalenia nauczycieli i bibliotek pedagogicznych w realizacji zadań związanych z przygotowaniem i wsparciem nauczycieli w prowadzeniu kształcenia na odległość”

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Materiał opracowany w ramach grantu przez Kingę Gałązkę nauczyciela konsultanta
Centrum Rozwoju Edukacji Województwa Łódzkiego w Łodzi

Spis treści

WSTĘP	3
SCENARIUSZ 1	5
TEMAT: Trójkąty liczbowe	5
WPROWADZENIE	5
PRZEBIEG ZAJĘĆ	8
SCENARIUSZ 2	20
TEMAT: Niezwykłe ciągi	20
WPROWADZENIE	20
PRZEBIEG ZAJĘĆ	23
ZAŁĄCZNIKI:	24
Zestaw 1	25
Zestaw 2	27
SCENARIUSZ 3	29
TEMAT: Procenty procentują	29
WPROWADZENIE	29
PRZEBIEG ZAJĘĆ:	33
BIBLIOGRAFIA	35

WSTĘP

W ostatnim czasie pojawiło się w sieci mnóstwo materiałów, których celem jest zainspirowanie nauczycieli do tworzenia ciekawych zajęć edukacji zdalnej. Niestety, większość z tych publikacji to teoretyczne rozważania na temat istoty e-learningu, wad i zalet takiego kształcenia, itp. Trudno więc na ich podstawie stworzyć rzeczywiste zajęcia edukacyjne dla uczących się.

Nauczyciel sięgając po takie materiały, często odsyłany jest do stron internetowych wymagających logowania, zawierających materiały obarczone błędami merytorycznymi. Dlatego z wielkim zainteresowaniem spotkała się inicjatywa przygotowania kompleksowych e-materiałów edukacyjnych z matematyki dla uczniów i nauczycieli szkół ponadpodstawowych. W ramach projektu „Tworzenie e-materiałów dydaktycznych do kształcenia ogólnego”, realizowanego przez Ośrodek Rozwoju Edukacji w ramach Programu Operacyjnego Wiedza, Edukacja, Rozwój, powstało 1250 lekcji zawierających interaktywne materiały do kształcenia matematycznego w zakresie rozszerzonym.

Każdy taki materiał zawiera część teoretyczną, szczegółowo rozwiązane przykłady, interaktywny zasób (np. aplet, animację, galerię zdjęć interaktywnych) ilustrujący dane zagadnienie. Uczący się mają okazję sprawdzić swoje umiejętności, rozwiązując interaktywne ćwiczenia, do których są podpowiedzi i odpowiedzi. Szczególnie ciekawe są filmy edukacyjne, które mogą być interesującym starterem do lekcji, zaczątkiem pracy projektowej dla uczniów, czy wstępem do dyskusji. Końcowym elementem każdego materiału jest scenariusz dla nauczyciela, który znakomicie ułatwi zaprojektowanie niebanalnych zajęć, opartych na metodach konstruktywistycznych.

Celem tego pakietu jest pokazanie przykładów budowania zdalnych zajęć edukacyjnych dla uczniów szkół ponadpodstawowych zgłębiających matematykę w zakresie rozszerzonym, z uwzględnieniem również wyżej wymienionych e-materiałów. Zawarte tu scenariusze można wykorzystać do zbudowania jednej lekcji, cyklu lekcji w ramach danego działu programowego, pomysłu na samodzielne poszukiwanie przez uczniów w sieci podobnych wiadomości.

Przy czym chcemy zachęcić uczących się do pogłębiania wiadomości, wychodzenia poza utarte schematy, postrzegania matematyki jako narzędzia do porządkowania i systematyzowania informacji z interesujących ich dziedzin wiedzy.

Chcemy też pokazać matematykę jako naukę wywodzącą się z kontekstów realistycznych, rzeczywistych potrzeb i rozważań nie tylko teoretycznych. Dla uczniów może być zaskoczeniem, że wiele odkryć matematycznych poczynili nie matematycy, ale geografowie, filozofowie, a nawet prawnicy. Zawarte tu pomysły można przemodelować dla potrzeb konkretnej grupy uczniów, czy realizowanego tematu, w zależności od możliwości wykorzystania narzędzi multimedialnych. Materiał oparty jest o wykorzystanie e-materiałów do kształcenia matematycznego, zamieszczonych na stronie Zintegrowanej Platformy Edukacyjnej.¹

¹ <https://zpe.gov.pl/ksztalcenie-ogolne/szkola-ponadpodstawowa/matematyka> [dostęp 12.11.21].

SCENARIUSZ 1

SCENARIUSZ ZAJĘĆ DLA: uczniów szkół ponadpodstawowych z matematyki w zakresie rozszerzonym

TEMAT: Trójkąty liczbowe

WPROWADZENIE

Na lekcjach stacjonarnych, ze względu na ograniczenia czasowe, zwykle nie ma miejsca na ciekawostki z historii matematyki, czy wręcz odwrotnie – dotyczące najnowszych matematycznych odkryć.

Zwykle dążymy do tego, aby pokazać uczniom jak największą liczbę przykładów dotyczących danego tematu, aby ułatwić zrozumienie trudnych zagadnień.

I tu wyraźna przewaga lekcji on-line. Praktycznie w każdym momencie można zrobić krótki przerywnik – prowokując dyskusję, wzbudzając zaciekawienie, zachęcając uczniów, którzy szybciej niż inni wykonują ćwiczenia, do poszukiwania w sieci dalszych elementów wzbogacających lekcję.

Zajęcia, których scenariusz prezentujemy, wymagają ścisłej współpracy uczniów online, ich maksymalnego zaangażowania. Ponieważ lekcja przeznaczona jest dla uczniów realizujących materiał z zakresu rozszerzonego, więc zakładamy, że ich wiadomości i umiejętności matematyczne są znacznie większe, niż przeciętnego licealisty czy ucznia technikum.

Lekcja ma charakter holistyczny. Dzieląc uczniów na grupy, warto więc uwzględnić w każdym zespole osoby o zainteresowaniach i uzdolnieniach:

- **artystycznych** – stworzone materiały muszą być nie tylko poprawne matematycznie, ale syntetyczne, przyciągające wzrok i przekazujące na maksymalnie małej przestrzeni wszystkie potrzebne informacje. Zatem te umiejętności wymieniliśmy jako pierwsze – bowiem współczesny uczeń najwięcej wiadomości wirtualnych przyswaja wzrokowo,
- **językowych** – będzie to przydatne do poszukiwania informacji na internetowych stronach obcojęzycznych,
- informatycznych – być może tacy uczniowie stworzą własny miniprogram pozwalający na tworzenie tablic liczbowych, wzorowanych na tych, które poznają w czasie zajęć,

- interdyscyplinarnych – ich pomysły pozwolą na scalenie pozyskanych materiałów, pokazanie przykładów zastosowania uzyskanych informacji w praktyce, wykorzystanie w innych dziedzinach wiedzy,
- organizacyjnych lider, to chyba najważniejsza rola w grupie. W warunkach zdalnej pracy szef zespołu nie ma możliwości wglądu w to, co robią inni członkowie grupy, czy rzeczywiście pracują nad przydzielonym im zadaniem, czy w tym czasie przeglądają wiadomości telefoniczne, albo jedzą śniadanie. Dlatego liderami powinny być to osoby cieszące się autorytetem, sprawnie posługujące się urządzeniami multimedialnymi, z których mogą korzystać pozostali uczniowie. Ich rolą jest również pilnowanie czasu pracy grupy, rozstrzyganie sporów na temat tego, które materiały trzeba zaprezentować, a które jako dodatkowe zamieścić na stronie internetowej danej klasy.

Trójkątne tablice liczb od wieków fascynowały uczonych. Znajomość budowy i zastosowania najbardziej znanych trójkątów (oprócz trójkąta Pascala) nie wchodzi w zakres formalnych treści zawartych w podstawie programowej. Jednak warto o nich wspomnieć, pokazując rozwój pojęć związanych z liczbami, algebrą, kombinatoryką.

Celem poniższego scenariusza, bazującego na wiadomościach dotyczących trójkątów liczbowych, jest zachęcenie uczących się do znajdowania relacji między matematyką a filozofią i literaturą. Poznając sylwetki twórców pojęć matematycznych, uczniowie zgłębiają jednocześnie okoliczności znaczących odkryć matematycznych, zastosowanie wynalezionych twierdzeń i wzorów.

Zajęcia budowane na podstawie scenariusza *Trójkąty liczbowe*, można wykorzystać jako podsumowanie cyklu zajęć dotyczących liczb rzeczywistych, wyrażeń algebraicznych lub jako wprowadzenie do zagadnień kombinatorycznych.

CELE KSZTAŁCENIA – WYMAGANIA OGÓLNE

- II.** Wykorzystanie i tworzenie informacji.
 2. Używanie języka matematycznego do tworzenia tekstów matematycznych, w tym do opisu prowadzonych rozumowań i uzasadniania wniosków, a także do przedstawiania danych.
- III.** Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.

IV. Rozumowanie i argumentacja.

2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

TREŚCI NAUCZANIA – WYMAGANIA SZCZEGÓŁOWE

Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 4) Stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 2) Stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona).

CELE OPERACYJNE

Uczeń:

- Konstruuje trójkąty liczbowe i odkrywa ich własności;
- Określa zastosowania trójkątów liczbowych w różnych działach matematyki i innych dziedzinach wiedzy;
- Zbiera informacje, interpretuje je i prezentuje;
- Dostrzega analogie, na ich podstawie stawia hipotezy i uzasadnia je.

METODY PRACY

- interaktywne puzzle
- burza mózgów
- prezentacje multimedialne

ŚRODKI DYDAKTYCZNE

- komputery z dostępem do Internetu dla każdego ucznia;
- smartfony (opcjonalnie).

CZAS PRACY

lekcja on-line (30 min lub opcjonalnie 45 min)

UWAGI:

- Zajęcia można przeprowadzić metodą odwróconej lekcji, to znaczy uczniowie samodzielnie w domu zbierają potrzebne wiadomości, a na lekcji porządkują je i prezentują.
- Całość materiału może też przygotować jedna grupa lub jeden uczeń i zaprezentować jako wstęp lub podsumowanie zdalnej lekcji.
- Poniżej propozycja lekcji prowadzonej online, w czasie której uczniowie będą pracować w grupach nad przydzielonymi im zadaniami. Rekomendowany tu podział na grupy jest losowy. Taki podział sprawdza się dobrze w klasach o w miarę jednolitych możliwościach uczniów. Natomiast w klasach, gdzie jest wyraźny podział na „humanistów” i „matematyków” nauczyciel może sam dokonać podziału na grupy – uwzględniając od razu zainteresowania uczniów, określone powyżej.
- Jeśli uczniowie w czasie lekcji będą tworzyć prezentacje z użyciem innych narzędzi niż PowerPoint, to wcześniej trzeba wypróbować, czy materiał będzie można udostępnić innym uczniom.
- Dobrym pomysłem może być skorzystanie z *slides*² – narzędzia on-line, które nie wymaga dodatkowego oprogramowania na komputerze. Jednak trzeba utworzyć konto i pamiętać, że wszystkie prezentacje są publiczne. Podczas tworzenia takiej prezentacji uczniowie mają wpływ na rodzaj czcionki, tło, itp. Gotowa prezentacja może być umieszczona na blogu lub stronie internetowej.

PRZEBIEG ZAJĘĆ

Wprowadzenie

- Nauczyciel pokazuje (np. w postaci infografiki) kilka portretów znanych matematyków (np. Eulera, Leibniza, Pascala, Bella) i pyta o ich dorobek matematyczny. Rozmowę warto tak poprowadzić, aby uczniowie zastanowili się, jakie elementy wspólne ma twórczość wszystkich tych matematyków.

² <https://slides.com/> [dostęp 5.11.2021]



3

Eric Bell



4

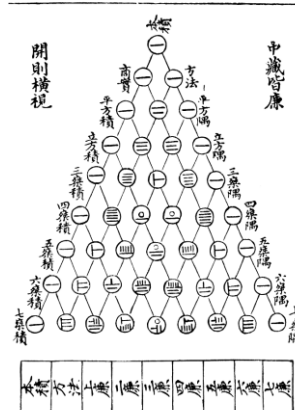
Blaise Pascal

Uczniowie mogą poszukać odpowiedzi na pytanie postawione przez nauczyciela metodą burzy mózgów. Zapewne największe kontrowersje wzbudzi Eric Bell, gdyż jest on najmniej znany z wyżej wymienionych matematyków. Natomiast Blaise Pascal zapewne szybko zostanie skojarzony z trójkątem Pascala, co da okazję nauczycielowi do podania tematu lekcji i określenia jej celów.

Nawiązując do tematu, nauczyciel prezentuje infografikę (wcześniej przygotowaną) pokazującą przykłady najstarszych tablic liczbowych. Wspomina, że trójkąty liczbowe znane były już w II wieku przed naszą erą. Przechodziły wiele modyfikacji i miały różną budowę.

Jedna z najstarszych tablic trójkątnych stanowi stronę tytułową chińskiej książki

圖方蔡七法古



Chu Shi – Chieh's (Lustro Czterech Elementów) z 1303 r.

5

³ *Eric Temple Bell sketch 1931.png*, [grafika z domeny publicznej], online: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a3/Eric Temple Bell sketch 1931.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a3/Eric_Temple_Bell_sketch_1931.png) [dostęp: 30.11.21].

⁴ *Blaise Pascal Versailles.JPG*, [grafika na licencji online: [CC-BY-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)], https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blaise_Pascal_Versailles.JPG#/media/Plik:Blaise_Pascal_Versailles.JPG [dostęp: 30.11.21].

⁵ *Yanghui_triangle.gif*, [grafika, domena publiczna], online: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Yanghui_triangle.gif#/media/File:Yanghui_triangle.gif [dostęp:30.11.21].

Uczniowie mogą podać przykłady znanych im, innych niż trójkątne, tablic liczbowych (np. kwadratów magicznych) i zastanowić się dlaczego to właśnie trójkąty liczbowe miały tak duży wpływ na rozwój nauk matematycznych.

Swoje przypuszczenia będą mogli zweryfikować, poznając konkretne trójkąty liczbowe.

- Nauczyciel dzieli uczniów na 5 grup – na przykład metodą matematycznych puzzli. Może tu skorzystać z bezpłatnej strony do tworzenia gier i puzzli <http://www.schoolexpress.com/index.php> [dostęp 12.11.2021]. Puzzle po ułożeniu powinny utworzyć nazwiska matematyków: Pascal, Bell, Euler, Catalan, Leibniz. Będą to zarazem nazwy grup, w których będą pracować uczniowie. Jeśli uczniowie wolą pracować w mniejszych zespołach – można jeszcze dodać dwa nazwiska, np.: Floyd, Clark.
- Nauczyciel określa czas pracy i informuje, że zadaniem każdej grupy jest pozyskanie jak największej liczby informacji na temat trójkątów liczbowych stworzonych przez matematyków, których nazwiska utworzyły puzzle. Można przy tym korzystać ze wszystkich dostępnych materiałów na przykład zasobów sieci, w tym zamieszczonych w e-materiałach na stronie Zintegrowanej Platformy Edukacyjnej.

Uczniowie w określonym czasie muszą przygotować krótką prezentację (w dowolnej, atrakcyjnej formie) pokazującą najistotniejsze, ale i najciekawsze informacje o trójkątach, które badali. Należy przy tym zwrócić uwagę na informacje, które mogą się przydać w dalszej edukacji (nie tylko matematycznej), rodzaje liczb, które można otrzymać korzystając z danych trójkątów liczbowych, zastosowanie dawne i współczesne trójkątów. Przydatne będą też ciekawe (może nawet zabawne) wiadomości o twórcach danych tablic liczbowych i kontekście ich wynalezienia. Ważne jest zatem holistyczne podejście do tematu.

- Każda z utworzonych grup wybiera lidera. Przy czym lider może negocjować z innymi grupami „wymianę” 1 – 2 członków jego grupy. Na przykład jeśli w danej grupie znajdzie się dwóch doskonałych informatyków, lider może zaproponować „wymianę” jednego z nich na ucznia świetnie władającego językiem angielskim. Jednak taka zamiana musi być prowadzona w bardzo przyjaznej atmosferze i za zgodą wszystkich zainteresowanych.

- Uczniowie formułują kryteria sukcesu – które w czasie pracy uczniów nauczyciel umieści na wirtualnej tablicy.

Przykład kryteriów, według których może być oceniana praca danej grupy.

Kryterium	Punkty 0 – 5
Poprawność matematyczna	
Kontekst historyczny, pokazanie pierwotnego i współczesnego wykorzystania trójkąta	
Atrakcyjność i innowacyjność formy	
Prezentacja sylwetki twórcy trójkąta	
Komunikatywność	
Różnorodność pozyskanych informacji	
Odniesienie do innych dziedzin wiedzy	

FAZA REALIZACJI

Każda z grup pracuje nad przydzielonym jej zadaniem. Nauczyciele udostępnia linki do przydatnych dla grup stron internetowych, pełni rolę konsultanta i ewentualnie rozstrzyga kwestie sporne. Poniżej kilka pomysłów, wskazówek, dotyczących treści, które powinna pozyskać i zaprezentować dana grupa. Oczywiście są one tylko pewną sugestią i w żaden sposób nie wyczerpują zagadnień.

Grupa – trójkąt Pascala

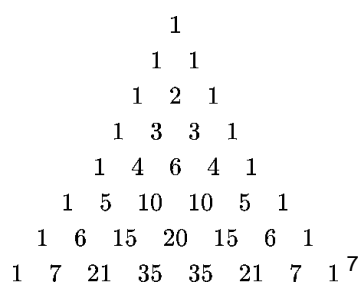
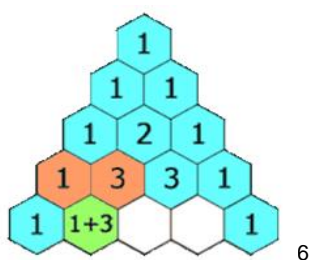
Pierwsze wzmianki o trójkątnych tablicach znajdujemy już w pracach uczonych perskich, indyjskich, chińskich. Dlatego trójkąt, zwany w Polsce trójkątem Pascala, zwany jest też trójkątem Chajjama, trójkątem Yang Hui lub trójkątem Tartaglii.

Natomiast Pascal zebrał wszelkie informacje na temat rozważań nad trójkątami liczbowymi i zastosował je, wcale nie do badania zagadnień z teorii liczb, ale do rozwiązywania problemów z rachunku prawdopodobieństwa. Przydatne linki:

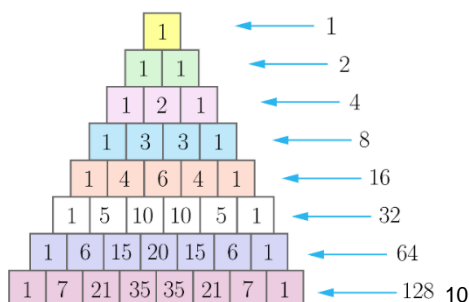
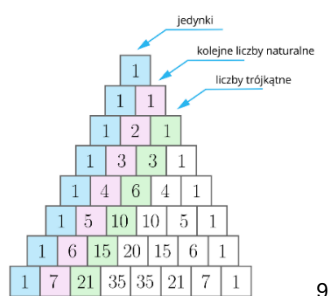
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal [dostęp 15.11.2021] – strona z biografią Pascala;
- https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle [dostęp 15.11.2021] – Szczegółowe informacje o trójkącie Pascala
- <https://zpe.gov.pl/b/trojkat-pascala/PNrnQDtKB> [dostęp 15.11.21] – problemy, zastosowania, ćwiczenia interaktywne związane z trójkątem Pascala

Grupa powinna zaprezentować między innymi sylwetkę Pascala, jako francuskiego matematyka, fizyka, inżyniera, filozofa, jak również wybitnego teologa.

- Warto, aby uczniowie zwrócili uwagę na odkrycia naukowca z dziedziny geometrii rzutowej, probabilistyki, mechaniki, hydrostatyki (prawo Pascala);
- historyczne wzmianki o trójkącie liczbowym, odkrytym prawdopodobnie na przełomie XI i XII wieku, na którym wzorował się Pascal, budując swoją tablicę liczbową;
- znaczenie trójkąta Pascala jako swego rodzaju matrycy, na której wzorowali się twórcy innych tablic liczbowych np. Floyd, Clark;
- sposób budowy trójkąta;



- kilka podstawowych własności trójkąta⁸;



⁶ *PascalTriangleAnimated2* [animacja, domena publiczna], online:

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PascalTriangleAnimated2.gif#/media/File:PascalTriangleAnimated2.gif>, [dostęp: 15.11.21].

⁷ *Trójkąt Pascala*, [grafika, domena publiczna], online:

https://wikimedia.org/api/rest_v1/media/math/render/svg/23050fcb53d6083d9e42043bebf2863fa9746043, [dostęp: 15.11.21].

⁸ Własności trójkąta Pascala Źródło: ZPE, Trójkąt Pascala, licencja: domena publiczna, online:

<https://zpe.gov.pl/a/przeczytaj/DGA3V0mbp>, [dostęp: 15.11.21].

⁹ [https://static.epodreczniki.pl/portal/f/res-](https://static.epodreczniki.pl/portal/f/res-minimized/RtfGpl33xWs4t/1608651105/Zi7GZ2PUmMw845hOKJcdJJKeCCFJ89T8.png)

[minimized/RtfGpl33xWs4t/1608651105/Zi7GZ2PUmMw845hOKJcdJJKeCCFJ89T8.png](https://static.epodreczniki.pl/portal/f/res-minimized/RtfGpl33xWs4t/1608651105/Zi7GZ2PUmMw845hOKJcdJJKeCCFJ89T8.png), [dostęp: 15.11.21].

¹⁰ [https://static.epodreczniki.pl/portal/f/res-](https://static.epodreczniki.pl/portal/f/res-minimized/Rotls5kr6ZiEw/1608651106/2Uunj9vHNHLDPHGduy4RbHYkfqZ1PYr.png)

[minimized/Rotls5kr6ZiEw/1608651106/2Uunj9vHNHLDPHGduy4RbHYkfqZ1PYr.png](https://static.epodreczniki.pl/portal/f/res-minimized/Rotls5kr6ZiEw/1608651106/2Uunj9vHNHLDPHGduy4RbHYkfqZ1PYr.png), [dostęp: 15.11.21].

- związek z dwumianem Newtona i innymi odkryciami Pascala.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} \\
 & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & & & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & & & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4}
 \end{array}$$

Grupa – trójkąt Bella

Eric Temple Bell to dwudziestowieczny szkocki matematyk i pisarz *science fiction*, który publikował pod pseudonimem John Taine. Zajmował się teorią liczb i analizą matematyczną. Liczba Bella to liczba podzbiorów danego zbioru n -elementowego. Kolejne liczby Bella: 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877,

Przydatne linki

- https://en.wikipedia.org/wiki/Eric_Temple_Bell [dostęp: 15.11.21] – strona z biografią Bella
- https://en.wikipedia.org/wiki/Bell_triangle [dostęp: 15.11.21] – szczegółowe informacje o trójkącie Bella
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_Bella [dostęp 15.11.21] – Informacje o liczbach Bella

Grupa powinna zaprezentować:

- sylwetkę Bella, jako wszechstronnego intelektualisty – wybitnego pisarza powieści *non-fiction*, naukowca pokazującego związki matematyki z sytuacjami z życia codziennego;
- sposób tworzenia trójkąta;

1					1				
1	2				1	2			
2	3	5			2	3	5		
5	7	10	15		5	7	10	15	
15	20	27	37	52	15	20	27	37	52

- zastosowanie liczb Bella, za pomocą których można określić na przykład:
 - liczbę rozmieszczeń n różnych obiektów w co najwyżej n identycznych pudełkach;
 - liczbę usadzeń n osób wokół co najwyżej n stolików (gdy nieważny jest sposób usadzenia osób przy stoliku);
 - liczbę różnych schematów rymowych w strofie n -wersowej.

Grupa – trójkąt Catalana

Wybierając środkowe liczby w trójkącie Pascala : 1, 2, 6, 20, 70, ... i dzieląc je odpowiednio przez 1, 2, 3, 4, 5,....., otrzymujemy ciąg liczb naturalnych 1, 1, 2, 5, 14, 42, 123, 429,.....

Tak utworzone liczby nazywamy liczbami Catalana, na cześć belgijskiego



dziewiętnastowiecznego matematyka Eugene Catalana ¹¹.

Przydatne linki

- https://pl.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Charles_Catalan. [dostęp 15.11.21], <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Catalan/>, [dostęp 15.11.21] – strony z biografią Catalana;
- https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan%27s_triangle. [dostęp 15.11.21] – Szczegółowe informacje o trójkącie Catalana;

Grupa powinna zaprezentować na przykład:

- sylwetkę Catalana- matematyka zajmującego się teorią liczb, geometrią wykreślną, ułamekami łańcuchowymi, kombinatoryką. Warto, aby wspomnieli o obiektach nazwanych jego imieniem- stałej Catalana i wielościanach Catalana;

¹¹ *Eugene charles catalan.jpg*, [grafika, domena publiczna], online: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eugene_charles_catalan.jpg#/media/File:Eugene_charles_catalan.jpg, [dostęp: 15.11.21].

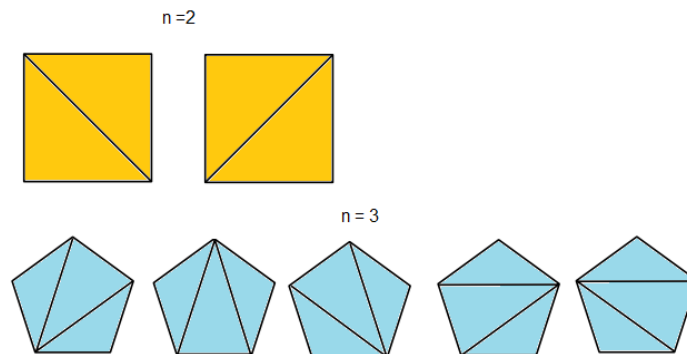
- kilka kolejnych liczb Catalana: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, ... i sposób ich tworzenia, przy wykorzystaniu trójkąta Pascala;
- budowę trójkąta i jego podstawowe własności;

1											1		
1	1									1	1		
1	2	2							1	2	2		
1	3	5	5					1	3	5	5		
1	4	9	14	14			1	4	9	14	14		
1	5	14	28	42	42			1	5	14	28	42	42

- wzór na otrzymanie n -tego wyrazu ciągu liczb Catalana

$$c_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \quad \text{dla } n \geq 0$$

- własności liczb Catalana – liczba c_n wyraża liczbę sposobów podziału wielokąta wypukłego, który ma $n + 2$ krawędzie na różne trójkąty, za pomocą nieprzecinających się przekątnych, np.:



Grupa – trójkąt Eulera



¹² Leonhard Euler to najwybitniejszy osiemnastowieczny uczyony, najbardziej przy tym twórczy. Był wszechstronny – zajmował się między innymi

¹² Leonhard_Euler.jpg, [grafika, domena publiczna], online: https://pl.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler#/media/Plik:Leonhard_Euler.jpg [dostęp: 30.11.21].

Grupa – trójkąt Leibniza



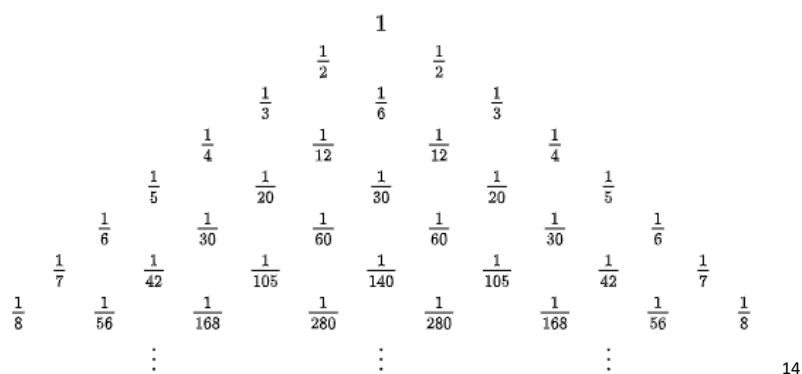
¹³ Gottfried Leibniz znany jest głównie jako filozof, prawnik, fizyk i dopiero jako matematyk. Jest to więc na tyle intrygująca postać, że uczniowie będą mogli odnieść wymyślony przez niego twór liczbowy do jego innych dokonań. Trójkąt autorstwa Leibniza jest niezwykły, gdyż jako jeden z nielicznych, składa się z liczb, które nie są liczbami naturalnymi. Przydatne linki:

- https://pl.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz, [dostęp 15.11.21] – Strona z biografią Leibniza
- https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_harmonic_triangle, [dostęp 15.11.21], <https://scholarworks.lib.csusb.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1969&context=etd>
- [dostęp 15.11.21] – szczegółowe informacje o trójkącie Leibniza
- http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_liczb/2020/01/29/trojkat-harmoniczny-blizniak-trojkata-pascala/, [dostęp 15.11.21] – własności trójkąta harmonicznego

Grupa między innymi powinna zaprezentować:

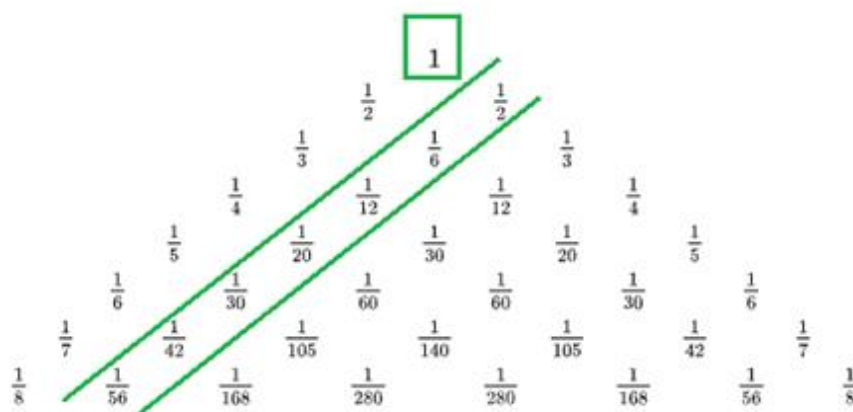
- sposób tworzenia trójkąta – każda liczba jest sumą dwóch liczb stojących bezpośrednio pod nią. Na prawym i lewym boku znajdują się odwrotności kolejnych liczb naturalnych (liczby harmoniczne);

¹³ *Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg*, [grafika, domena publiczna], online: https://pl.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz#/media/Plik:Gottfried_Wilhelm_von_Leibniz.jpg [dostęp: 30.11.21].



14

- podstawowe własności; np. każda liczba harmoniczna jest nieskończoną sumą liczb na skosie trójkąta.



PODSUMOWANIE ZAJĘĆ

- Dyskusja – dlaczego tablice liczbowe, choć tak proste w swojej budowie, stanowią fundamentalne podstawy do rozumienia zagadnień z wielu dziedzin matematyki.
- Nauczyciel prosi uczniów o podsumowanie zajęć, ocenę koleżeńską pracy każdej grupy, według ustalonych kryteriów. Można przy tym wykorzystać program *Plickers*¹⁵, który pozwala na szybkie podliczenie wyników ankiety ewaluacyjnej, odnoszącej się do zakładanych kryteriów sukcesu. Uczniowie mogą przy tym dysponować smartfonami lub tabletami z dostępem do Internetu.
- Nie może zabraknąć istotnych elementów lekcji: refleksji liderów grup i nauczyciela.

¹⁴ Trójkąt harmoniczny, CC BY-SA 3/0, online: https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_harmonic_triangle [dostęp: 15.11.21].

¹⁵ Plickers, [aplikacja], online: <https://get.plickers.com> [dostęp 15.11.21].

- Końcowym elementem mogą być prezentacje multimedialne zamieszczone na stronie <https://zpe.gov.pl/a/prezentacja-multimedialna/DFIFIGV8d>,
- <https://zpe.gov.pl/a/animacja/Des1kvoXL>, [dostęp 15.11.21], w których można znaleźć krótkie wiadomości o wszystkich trójkątach, którymi zajmowali się uczniowie.
- Warto ustalić, czy wypracowane materiały będą dostępne tylko dla wszystkich uczniów danej klasy, czy zostaną zamieszczone na stronie szkoły, a może w Internecie w domenie publicznej.
- W ramach pracy domowej uczniowie mogą wykonać ćwiczenia interaktywne z e-materiałów <https://zpe.gov.pl/a/sprawdz-sie/Dw1IbLOzD> [dostęp 15.11.21]

Chętnych uczniów można poprosić o konstrukcję własnych trójkątów liczbowych i ustalenie kilku ich ciekawych własności.

Uwaga:

Zajęcia zaproponowane powyżej można poprowadzić metodą *WebQuest*.

Ze względu na dłuższy okres realizacji projektu, metoda ta da okazję uczniom do szerszego zgłębienia zagadnień, znalezienia większej liczby ciekawostek, pogłębienia interdyscyplinarności. A chęć rywalizacji zwiększy motywację do pracy i zmobilizuje do wybrania najatrakcyjniejszej formy prezentacji.

SCENARIUSZ 2

SCENARIUSZ ZAJĘĆ DLA: uczniów szkół ponadpodstawowych z matematyki w zakresie rozszerzonym

TEMAT: Niezwykłe ciągi

WPROWADZENIE

Na stronie Zintegrowanej Platformy Edukacyjnej znajduje się ponad 40 materiałów dotyczących ciągów liczbowych. Wszystkie są niezwykle starannie przemyślane i zawierają nie tylko konieczne informacje z zakresu danej tematyki, ale i wiele ciekawostek, które mogą znakomicie wzbogacić każdą lekcję lub być zaczątkiem do bardziej szczegółowego zgłębiania danego zagadnienia. Przygotowując lekcję dotyczącą ciągów liczbowych, opartą na przykład o poniższy scenariusz, warto więc również sięgnąć po te materiały.

Ciągów na ogół nie traktuje się jako kluczowego działu matematyki szkolnej. Mogą stanowić istotę samokształcenia uczących się w edukacji zdalnej, bowiem dość luźno wiążą się z innymi działami matematyki, nie wymagają skomplikowanych graficznych interpretacji (które są zmorą edukacji online), a znajomość podstawowych przekształceń algebraicznych na ogół wystarcza do rozwiązania zadań.

W edukacji online najtrudniejsze jest zawsze sprawdzenie, czy uczący się rzeczywiście korzystają z proponowanych im materiałów, czy rozwiązują polecane zadania, korzystając na przykład z „gotowców” znajdujących się w Internecie lub bazując na zdjęciach rozwiązań, które bardziej pracowici koledzy rozesłali telefonicznie lub mailowo.

W tym materiale proponujemy więc sposób na sprawdzenie rzeczywistych umiejętności uczniów, po realizacji tematów związanych z ciągami. Przy czym wszystko musi być tak przeprowadzone, aby uczniowie dobrze się przy tym bawili, a jednocześnie byli maksymalnie zmobilizowani do rozwiązania danego problemu. Sposoby motywacji warto tak skonstruować, aby uczniowie, którzy nie znajdują odpowiedzi na postawione pytania nie czuli się ośmieszeni, ani zdegradowani intelektualnie.

Jeśli uczniowie na zajęciach nie korzystają z e-materiałów, proponowane zadania, pokażą im atrakcyjność tych treści i zachęcą do zaglądania na stronę Zintegrowanej Platformy Edukacyjnej.

Poniższa propozycja to minikonkurs zadaniowy dla par uczniów. Jednak liczba wspólnie pracujących uczniów, sposób ich doboru, czas pracy, forma przekazu zadań konkursowych mogą odbywać się w różny sposób w zależności od liczebności danej klasy, możliwości przekazu medialnego, itp. Przedstawiony scenariusz można modyfikować dowolnie, bazując na własnych pomysłach i doświadczeniach.

CELE KSZTAŁCENIA – WYMAGANIA OGÓLNE

III Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

IV Rozumowanie i argumentacja.

2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii, formułowanie wniosków na ich podstawie i uzasadnianie ich poprawności.

TREŚCI NAUCZANIA – WYMAGANIA SZCZEGÓŁOWE

VI Ciągi. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie [...]
- 3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 5) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 6) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

CELE OPERACYJNE

Uczeń:

- stosuje wiadomości na temat ciągów liczbowych w sytuacjach typowych i nietypowych
- posługuje się analogiami, stawiając hipotezy i sprawdzając poprawność rozumowania
- korzysta z e-materiałów do poszukiwania potrzebnych informacji

METODY PRACY

- mapa myśli;
- prezentacja multimedialna (film, komiks, książeczka, itp.);
- konkurs zadaniowy.

ŚRODKI DYDAKTYCZNE

- komputery z dostępem do Internetu dla każdego ucznia;
- smartfony (opcjonalnie).

CZAS PRACY

2 x 30 min (zdalnie)

UWAGI:

Przed zajęciami nauczyciel prosi chętnego ucznia (lub grupę uczniów) o przygotowanie interesującego materiału multimedialnego zawierającego ciekawostki o wybranych ciągach liczbowych, nieznane ich własności, nieoczekiwane ich zastosowania.

Przykłady pomocnych narzędzi:

- *DvolverMoviemaker*¹⁶ do stworzenia animowanego filmu. Można dodać swoje dialogi (bez polskich liter), dobrać postacie, rekwizyty i scenerie. Niestety problem mogą stanowić znaki matematyczne. Jeśli uczeń zdecyduje się na taką formę zebrania informacji, wysyła film do wybranej osoby. Otrzymuje kod pozwalający na umieszczenie filmu na stronie lub blogu.
- *Bitstrips for Schools*¹⁷ do tworzenia ciekawego komiksu. Można wybrać bohaterów, rekwizyty, importować własne obrazy.
- *StoryJumper*¹⁸ to aplikacja umożliwiająca tworzenie książeczek. Można dodawać własne obrazki i zdjęcia lub korzystać z gotowej galerii ilustracji.

Pozostali uczniowie w ramach pracy domowej mają za zadanie wykonanie mapy myśli, na przykład korzystając z platformy do projektowania graficznego *Canva*¹⁹. Mapa powinna odzwierciedlać powiązania między różnymi rodzajami ciągów i odnosić się do najważniejszych poznanych wzorów i twierdzeń.

¹⁶ *Dvolver Maker*, [aplikacja], online: <http://www.dvolver.com> [dostęp 15.11.2021].

¹⁷ *Bitstrips for Schools* [aplikacja], online <http://www.bitstripsforschools.com/> [dostęp 15.11.21].

¹⁸ *StoryJumper*, [aplikacja], online: <https://www.storyjumper.com/>, [dostęp:15.11.21].

¹⁹ *Canva*; [aplikacja], online: https://www.canva.com/pl_pl/wykresy/mapy-mysli/, [dostęp_15.11.21].

W czasie zajęć uczniowie wezmą udział w minikonkursie zadaniowym. Nauczyciel może przygotować własne zadania lub skorzystać z proponowanych.

Wszystkie zapisane w załączniku zadania, przygotowane są na bazie treści zawartych na stronach e-materiałów do matematyki dla szkoły ponadpodstawowej:

<https://zpe.gov.pl/ksztalcenie-ogolne/szkola-ponadpodstawowa/matematyka>,

[dostęp 15.11.21]

Jeśli nauczyciel zdecyduje się na wykorzystanie gotowych zadań, można uczniom wcześniej zasugerować, że warto zapoznać się z zawartością tematów dotyczących ciągów w e-materiałach.

PRZEBIEG ZAJĘĆ

WPROWADZENIE

- Uczeń, który przygotował w domu komiks, książeczkę czy film, zawierający ciekawostki o wybranych ciągach – prezentuje pozostałym swoją pracę.
- Teraz osoba, która skończyła prezentację, wybiera ucznia, który
- udostępni i objaśni wykonaną przez siebie w domu mapę myśli. Jest tu też miejsce na zadawanie pytań, uzupełnianie mapy, itp.
- Pozostali uczniowie oceniają wystąpienia kolegów, którzy otrzymują oceny lub odpowiednią liczbę punktów.

FAZA REALIZACJI

- Kluczowa część lekcji to minikonkurs zadaniowy (załączniki: **zestaw 1** – łatwy, **zestaw 2** – trudniejszy).
- Nauczyciel może przygotować go w formie quizu interaktywnego (wtedy trzeba podać kilka odpowiedzi do wyboru), kolejne zadania umieszczać na tablicy np. w *MS Teams*.
- Można punktować pracę poszczególnych uczniów lub par uczniów.
- Jedną z propozycji doboru uczniów w pary może być ich czas logowania się na stronie przedmiotu. Np. najwcześniej zalogowany uczeń tworzy parę z najpóźniej zalogowanym, itd.
- Trzeba określić czas na odpowiedź i liczbę zadań.
- Konkurs składa się z dwóch części – łatwej, obejmującej elementarne wiadomości ciągach i trudniejszej – tu trzeba już wykazać się również umiejętnościami dotyczącymi ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

- Jeśli nauczycielowi „uda się” nie określić kryterium wygranej (zwycięża para z największą liczbą punktów), może dla żartu w czasie pracy lub po pierwszej części, ustalić dowolne zasady np. dodatkowe punkty otrzymuje para, która najwolniej rozwiązywała zadania, albo para, która ma najmniej punktów, itp. Chodzi o wywołanie efektu dobrej zabawy, a nie rywalizacji za wszelką cenę. Ale można tak postąpić tylko w klasie, w której uczniowie są na tyle zgrani, że nie poczują się urażeni, albo oburzeni na niesprawiedliwe w ich mniemaniu zmienianie zasad gry.

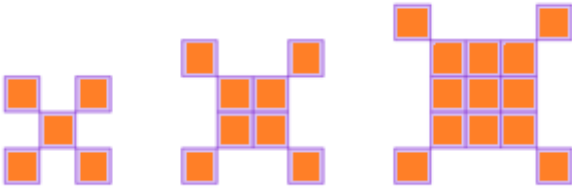
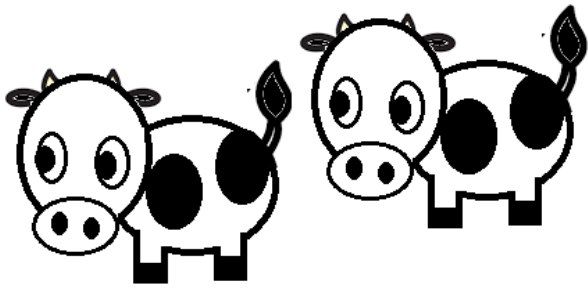
PODSUMOWANIE

- Uczniowie opowiadają o swoich mini sukcesach, trudnościach, o tym co było dla nich ważne.
- Mogą podsumować zajęcia za pomocą słów, rysunków, muzyki.
- Wspólnie mogą zastanowić się nad tym jaki był cel lekcji i czy został osiągnięty.
- Dobrze, aby refleksja nauczyciela obejmowała nie tylko umiejętności matematyczne uczniów, ale też ich kreatywność w pozyskiwaniu wiedzy, sposób komunikacji, wywiązanie się z określonych zadań.
- Ocena może być dokonana również za pomocą emotikonek lub innych dowcipnych znaków.

ZAŁĄCZNIKI:

Zestaw 1

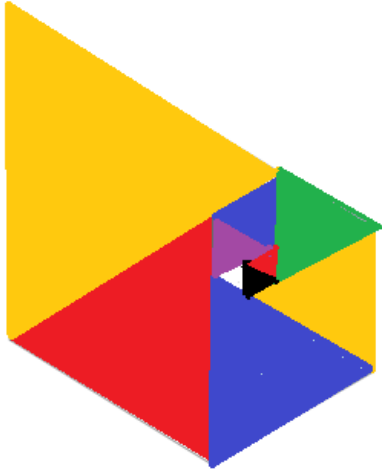
Za każdą poprawną odpowiedź można otrzymać 1 pkt. Zła odpowiedź to 0 pkt.

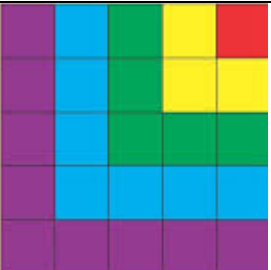
Nr zad.	Treść zadania	Poprawna odpowiedź
1	<p>Na rysunku przedstawione są trzy kolejne początkowe wyrazy ciągu (a_n). Zapisz wzór ogólny tego ciągu.</p>  <p style="text-align: center;">1 2 3</p>	<p>Np. $a_n = n^2 + 4$</p>
2	<p>Wyrazy ciągu $M_n = 2^n - 1$ zwane są liczbami Mersenne'a, na cześć ich odkrywcy. Mersenne uważał, że za pomocą tego wzoru można znaleźć dowolną liczbę pierwszą. Czy miał rację?</p>	<p>Nie, na przykład liczba 11 jest liczbą pierwszą, a nie jest wyrazem tego ciągu.</p>
3	<p>Kolejnymi wyrazami ciągu (p_n) są liczby prostokątne, czyli liczby będące iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych. Trzy początkowe wyrazy tego ciągu to 2, 6, 12. Podaj trzy kolejne wyrazy tego ciągu.</p>	<p>20, 30, 42</p>
4	<p>Z jakim ciągiem kojarzy ci się poniższy rysunek?</p> 	<p>Ciąg krów Narayana.</p>
5	<p>Ciąg Catalana określony jest wzorem $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$ dla $n \geq 1$ Ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 100?</p>	<p>5 wyrazów: 1, 2, 5, 14, 42</p>

6	<p>Autor twierdzenia: dla liczby naturalnej $n > 2$ nie istnieją liczby naturalne dodatnie x, y, z spełniające równanie $x^n + y^n = z^n$, jest również twórcą ciągu liczbowego, nazwanego jego nazwiskiem. Którym wyrazem tego ciągu jest liczba 5? Zakładamy, że ciąg jest określony dla $n \geq 1$.</p>	<p>Jest to pierwszy wyraz ciągu Fermata: $F_n = 2^{2^n} + 1$</p>
7	<p>Najmniejszy wyraz ciągu określonego wzorem $a_n = n(n - 10) + 36$ jest liczba pierwszą czy złożoną?</p>	Liczba pierwsza, 11
8	<p>Określ monotoniczność ciągu $a_n = \left[\frac{n}{2} \right]$ dla $n \geq 1$</p>	Ciąg niemalejący
9	<p>Uzupełnij zdanie. Ciąg jednocześnie rosnący i malejący to ciąg.....</p>stały
10	<p>Dany jest ciąg liczbowy (a_n). Zapisz średnią geometryczną dwóch wyrazów tego ciągu, sąsiadujących bezpośrednio z wyrazem a_n.</p>	$\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

Zestaw 2

Za każdą poprawną odpowiedź można otrzymać 1 pkt. Zła odpowiedź to 0 pkt.

Nr zad.	Treść zadania	Poprawna odpowiedź
1	Ile jest równa suma liczb: 13, 17, 21, ...,97?	1210
2	Jeśli $1 + 7 + 13 + 19 + \dots + n = 481$ to ile wyrazów dodano?	13
3	Wynalazca zagadki wieża z Hanoi zajmował się też teorią liczb. Zdefiniowane przez niego liczby używane są obecnie w algorytmach szyfrowania. Podaj wzór rekurencyjny ciągu składającego się z tych liczb.	Francois Lucas Ciąg Lucasa $L_1 = 1$ $L_2 = 3$ $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$
4	 <p>Na ścianie domu pana Bogdana widnieje mozaika zbudowana z płytek w kształcie trójkątów równobocznych taka, jak na rysunku. Z wyrazami jakiego ciągu zgodne są długości boków tych trójkątów?</p>	Z wyrazami ciągu architekta Richarda Padovana. 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16
5	Zapisz, odpowiednikiem jakiej techniki matematycznej jest rozumowanie: <ul style="list-style-type: none"> • moja matka jest starsza ode mnie • moja matka była czyjąś córką • matka mojej matki była od mojej matki starsza • matka mojej matki była czyjąś córką 	Rekurencji

6	<p>Który rodzaj zabawek pasuje do stwierdzeń <i>sen we śnie, lustro w lustrze</i>? Piłki, szachy, kostki Rubika, czy matrioszki?</p>	<p>Matrioszki Matematycznym odpowiednikiem stwierdzeń <i>sen we śnie, lustro w lustrze</i> jest rekurencja.</p>
7	<p>Ile wynosi suma wyrazów szeregu Grandiego?</p>	<p>Szereg naprzemienny: 1-1+1- 1.... Szereg rozbieżny</p>
8	 <p>Rysunek przedstawia ilustrację graficzną kilku początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego. Ile wynosi dziesiąty wyraz tego ciągu?</p>	<p>Ciąg kolejnych liczb nieparzystych. 19</p>
9	<p>Dany jest ciąg geometryczny (a_1, a_2, \dots, a_n) o wyrazach dodatnich. Uzupełnij równość: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \dots$</p>	$\sqrt{a_1 \cdot a_n}$
10	<p>Podaj wzór ogólny ciągu zdefiniowanego rekurencyjnie: $a_1 = 0,5$ $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} \text{ dla } n > 1$</p>	$a_n = \frac{1}{n+1}$

SCENARIUSZ 3

SCENARIUSZ ZAJĘĆ DLA: uczniów szkół ponadpodstawowych z matematyki w zakresie rozszerzonym

TEMAT: Procenty procentują

WPROWADZENIE

Planując środowisko edukacji zdalnej, nauczyciel zwykle koncentruje się na elementach techniczno-kognitywnych. Wydaje się bowiem, że najważniejszym elementem procesu dydaktycznego jest warstwa poznawcza i ciekawy, przystępny sposób prezentacji treści kształcenia.

Tymczasem w edukacji zdalnej bardzo ważną rolę spełniają czynniki bazujące na emocjach uczących się. Wpływają one bowiem mobilizująco lub hamująco na aktywność poznawczą. Emocje pozytywne (zaciekawienie, wesołość) utrzymują wysoką aktywność intelektualną. Emocje negatywne (strach, złość) blokują przyswajanie nowej wiedzy.

E-learning powoduje, że wszystkie czynności wykonywane muszą być dużo szybciej i sprawniej, gdyż nie zawsze jest możliwość i czas na ich powtórzenie. Działa to stresogennie na wielu uczących się, nie zawsze wywołuje działania pozwalające na dostosowanie się do szybko zmieniających się warunków. W sytuacjach występowania obciążeń (np. spowodowanych trudnościami technicznymi) związanych z niemożliwością realizacji zadań, pojawia się gniew, poczucie krzywdy. Wyzwolona w ten sposób energia może być przydatna w poszukiwaniu nowych rozwiązań, ale też może zniechęcać, powodować przygnębienie.

Chcąc stworzyć optymalne środowisko wirtualnej pracy, warto posługiwać się „chwytami” pozwalającymi na stworzenie pozytywnego nastroju. Przy czym nie chodzi tu o krótkotrwałe emocje (dzisiaj wszyscy otrzymają za pracę co najmniej 4), ale o kompleksowe działania, które zaprocentują ukazaniem matematyki jako przedmiotu interesującego i niezbyt trudnego.

Umiejętność wychwytywania i szybkiego tłumienia negatywnych emocji nie jest łatwa w edukacji zdalnej, gdyż często nauczyciel nie widzi uczącego się i nie może bezpośrednio wyeliminować czynników hamujących procesy uczenia się.

Planując więc strategie nauczania, warto mieć w zanadrzu elementy, które pozwolą na:

- **pobudzenie ciekawości** – poprzez innowacyjne metody działania, zróżnicowany materiał, nietypowe czynniki przekazu,
- **stawianie wyzwań** – poprzez samodzielne zdobywanie i odkrywanie wiedzy (np. wirtualny pokój zagadek), działania w zróżnicowanych grupach (np. składających się z uczniów z różnych szkół),
- **budowanie zaufania** – selekcja i dobór materiałów, odpowiedni dobór uczniów do pracy z grupami, dostrzeganie pracy każdego,
- **tworzenie motywującego obrazu kontroli procesu uczenia się uczniów** – samoocena, ocena koleżeńska, ocena przyjaznego neutralnego obserwatora.

Zastosowanie grywalizacji w edukacji zdalnej

W kształceniu matematycznych w zakresie rozszerzonym, z uwagi na stopień złożoności problemów, które są niezbędne do zgłębienia, dominuje kognitywny sposób uczenia się. Zatem z przyjemnością uczniowie witają sytuacje eksperymentalne, wskazujące inne drogi pozyskiwania wiedzy. Wdzięczne będzie tu wykorzystanie grywalizacji – przeplatanie oczekiwanych i zaskakujących (sterowanych!) rozwiązań (przy dominacji poprawnych wyników), może wytworzyć emocje sprzyjające aktywnej pracy. Elementy gry powinny być tak dobrane, aby uczeń czuł się bezpiecznie na każdym jej etapie i wiedział, że poprawna odpowiedź jest w zasięgu jego możliwości.

Jeśli kolejne etapy gry mają być pokonywane w grupach, ważna jest konstrukcja tych grup. Najlepiej, gdy spotkają się w niej osoby preferujące różne style uczenia się i o różnych umiejętnościach. Warto więc, aby w tym przypadku, dobór uczniów proponował nauczyciel. W ten sposób łatwiejsze będzie poszukiwanie właściwych rozwiązań i grupa nie będzie musiała szukać zbyt często pomocy u nauczyciela. Grywalizacja w edukacji zdalnej powinna zwiększać motywację i zaangażowanie uczniów, kształtować u nich takie umiejętności jak rozwiązywanie problemów we współpracy, kreatywne myślenie.

Działania grywalizacyjne mogą być podejmowane dla przyjemności lub dla osiągnięcia korzyści (np. w postaci dobrej oceny). Mistrzostwo nauczyciela polega na wytworzeniu takiej sytuacji, która zachowa w równowadze oba te czynniki motywujące. Nie należy przy tym zapominać o celu edukacyjnym, związanym z tematem danej lekcji i zainteresowaniami uczniów.

Dobrze przemyślany system nagród i kar warto oprzeć na teorii wzmocnień – młodzież będzie chętnie powtarzała te czynności, które mają pozytywne rezultaty, a unikała tych, przynoszących nieprzyjemne rezultaty. Nagrody nie muszą być materialem, wszystko może być tak skonstruowane, aby nagrodę stanowiła radość z wygranej części lub przejścia do następnego poziomu.

Elementy gry

Matematyczna gra może sprawiać wrażenie oderwania od rzeczywistego świata lub przeciwnie – opierać się na kontekście realistycznym. W każdym jednak przypadku trzeba starannie przemyśleć dany element gry – jeśli gra ma być atrakcyjna i możliwa do zrealizowana w danym czasie.

- **Fabula i narracja** – reguły gry muszą być jasne, fabuła powinna działać na wyobraźnię, odwoływać się do doświadczeń uczniów.
- **Zadania** – ciekawe i niebanalne sformułowanie zadań matematycznych nie jest łatwe, wymaga dużej wprawy i wyobraźni. Zadania nie mogą być zbyt łatwe, muszą uwzględniać potrzebne założenia, wiązać kolejne poziomy.
- **Nagrody i kary** – najlepiej sprawdzi się system punktowy, gdyż od razu może być widoczny postęp w ramach określonych aktywności. Zdobycie danej liczby punktów może być nagradzane dostępem do kolejnego poziomu gry. Wygranie gry to zamieszczenie nazwisk szczęśliwców w szkolnym rankingu wirtualnych mistrzów. Można przewidzieć też specjalne nagrody – np. tytuł żelazny – można przypisać osobie, która podejmowała z próby rozwiązania każdego zadania. Mogą być też i kary na przykład za brak zaangażowania.
- **Rankingi, tabele** – są świetnym elementem informacji zwrotnej dla gracza, który może porównać swoją pozycję na tle klasy, szkoły czy innej grupy uczniów. Odpowiedni wynik może gwarantować dobrą ocenę z matematyki.

Narzędzia wspierające grywalizację

Decydując się na wprowadzenie grywalizacji do zajęć, trzeba ustalić, czy wszyscy uczniowie mają dostęp do koniecznych aplikacji i narzędzi.

Często wykorzystywaną platformą internetową do tworzenia quizów, do których można dodawać zdjęcia, filmy, muzykę, jest *Kahoot!*.

Równie popularna platforma to *Mentimeter*, za pomocą której można tworzyć prezentacje z interaktywnymi quizami, ankietami, chmurami słów, skalami.

Warto też zapoznać się z funkcjonalnościami Zintegrowanej Platformy Edukacyjnej i szerzej je wykorzystywać.

Przydatne narzędzia:

- *Superteachertools*²⁰ – to strona do tworzenia gier online. Opcja multiplayer umożliwia dołączenie do gry każdemu z uczniów;
- *Educandy*²¹ – strona pozwalająca na szybkie projektowanie prostych gier, anagramów, krzyżówek;
- *Skribbl*²² – strona umożliwiająca przeprowadzenie gry w kalambury;
- *Pickerwheel*²³ – za pomocą tej strony można stworzyć matematyczne koło fortuny, losować liczby i obrazki, automatycznie dzielić uczniów na grupy;
- *Wisc-online*²⁴ – generator gier planszowych, quizów, gry w bingo. Uczniowie mogą grać wspólnie.

CELE KSZTAŁCENIA – WYMAGANIA OGÓLNE

- I. Sprawność rachunkowa. Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych, także przy użyciu kalkulatora, stosowanie praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych oraz wykorzystywanie tych umiejętności przy rozwiązywaniu problemów w kontekstach rzeczywistych i teoretycznych.
- III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych
- IV. Rozumowanie i argumentacja
 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.

TREŚCI NAUCZANIA – WYMAGANIA SZCZEGÓŁOWE

1. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

²⁰ <https://www.superteachertools.us/> [dostęp 10.11.21].

²¹ <https://www.educandy.com/> [dostęp 10.11.21].

²² <https://skribbl.io/> [dostęp 10.11.21].

²³ <https://pickerwheel.com/> [dostęp 10.11.21].

²⁴ <https://www.wisc-online.com/> [dostęp: 10.11.21].

CELE OPERACYJNE

Uczeń:

- Stosuje wiadomości na temat procentów w sytuacjach typowych i nietypowych.
- Bierze udział w grze dydaktycznej, opracowując i wykorzystując najefektywniejsze strategie.
- Korzysta z e-materiałów do poszukiwania potrzebnych informacji.

METODY, TECHNIKI PRACY

- gra dydaktyczna

ŚRODKI DYDAKTYCZNE

- komputery z dostępem do Internetu dla każdego ucznia;
- smartfony (opcjonalnie);
- kalkulatory.

CZAS PRACY

45 min

PRZEBIEG ZAJĘĆ:

Uwagi:

Kilka dni wcześniej grupa chętnych uczniów (o zaawansowanych umiejętnościach informatycznych) ma za zadanie opracowanie interesującej gry na temat procentów. Uczniowie mogą przy tym korzystać z zasobów Zintegrowanej Platformy Edukacyjnej – znajduje się tam około 30 materiałów dotyczących procentów.

Przygotowane zadania powinny być poukładane w grupy stopniujące trudności.

Mogą uwzględnić używanie kalkulatorów.

Opracowany przez uczniów materiał dobrze by było, aby został zweryfikowany przez nauczyciela, również pod kątem dostępności narzędziowej.

Wprowadzenie

- Lekcję można rozpocząć od pokazania na ekranie elementów graficznych (np. "uśmieszki", "chichotki") wprowadzających dobry nastrój i zachęcających do odgadnięcia tematu lekcji.
- Można też rozpocząć tradycyjnie, od opowiedzenia zabawnej anegdotki.

- *Edward opisuje swoją podróż pociągiem: przez 30% czasu spałem, przez 20% czasu wyglądałem przez okno, a 70% czasu poświęciłem na rozmowy telefoniczne.*

Na to Ewa: Edwardzie, to razem daje więcej niż 100 procent!

Edward: Przecież jechałem pociągiem pośpiesznym!

Uczniowie powinni teraz łatwo odgadnąć tematykę zajęć.

- Nauczyciel określa cel zajęć i sposób pracy – udział w grze dydaktycznej. Uczniowie metodą *kawiarenka oczekiwania* publikują na forum swoje oczekiwania dotyczące lekcji, wspólnie formułują kryteria sukcesu.

Faza realizacji

- Nauczyciel dzieli uczniów na grupy i wyznacza liderów. Może również przydzielić pozostałe role w grupach. Określa czas i sposób monitorowania pracy uczniów, podaje kilka przydatnych linków. Przydatne linki
 - <https://zpe.gov.pl/b/procenty/PwEaGxMON>, [dostęp 19.11.21] – procenty;
 - https://zpe.gov.pl/b/wyznaczanie-liczby-gdy-dany-jest-jej-procent/PjGlgFLDd_ [dostęp 19.11.21] – wyznaczanie liczby, gdy dany jest jej procent;
 - <https://zpe.gov.pl/b/obliczanie-procentu-danej-liczby/PRFT9RQ0e>, [dostęp 19.11.21] – obliczanie procentu danej liczby;
 - <https://zpe.gov.pl/b/punkty-procentowe/PM7pVns7E>, [dostęp 19.11.21] – punkty procentowe;
 - <https://zpe.gov.pl/b/procent-skladany/PljGLLFFe>, [dostęp 19.11.21] – procent składany.
- Uczniowie pokonują kolejne poziomy gry przygotowanej przez kolegów. Mogą przy tym korzystać z kalkulatorów, zasobów e- materiałów. Zespół który przygotował grę pełni role doradców, ekspertów rozstrzygających spory dotyczące poprawności stosowanych wzorów i twierdzeń. Nie wolno im jednak udzielać podpowiedzi i wskazówek dotyczących rozwiązywania zadań. W razie wyraźnych wątpliwości, spory rozstrzyga nauczyciel. Reguły te można zmienić – na przykład każda grupa może mieć prawo do jednej podpowiedzi lub wskazówki.

Trzeba przy tym pamiętać, że uczniowie mają prawo do błędów, że wszelkie podejmowane przez nich wysiłki są dostrzegane i doceniane, że i małymi krokami można dojść do celu.

- Po upływie wyznaczonego czasu grupa prowadząca grę ogłasza zwycięzców – fanfarami, fajerwerkami (wirtualnymi), itp. Nawet, jeśli żadna z grup nie ukończyła gry. Zwycięzcy otrzymują ustaloną nagrodę.

Podsumowanie

- Lider każdej z grup prezentuje slajd na którym zamieszcza refleksje dotyczące pracy grupy – trudności, sukcesy, sposób pracy, osiągnięty wynik, odniesienia do celów lekcji.
- Uczniowie oceniają atrakcyjność przygotowanej gry, przydatność zadań do utrwalenia umiejętności zastosowania procentów, stopień trudności zadań, itp.
- Grupa, która przygotowała grę przekazuje swoje spostrzeżenia – czy tok myślenia graczy był zgodny z oczekiwanym, czy przewidywany czas pracy był dobrze określony, itp.
- Zajęcia może podsumować nauczyciel – udzielając wskazówek – jak unikać popełnianych błędów, jak dobierać odpowiednią strategię gry, itd.

BIBLIOGRAFIA

- Budhair, S.S. & Skipwith, *Best Practices in Engaging Online Learners Through Active and Experiential Learning Strategies*, Londyn, Routledge, 2017.
- Fontana D., *Psychologia dla nauczycieli*, Zysk i s-ka, Poznań 2017.
- Lewis M., Haviland-Jones J.(red.), *Psychologia emocji*, GWP, Gdańsk 2015.
- Lubina E., *Rola emocji w procesie kształcenia na odległość*, E-mentor, Warszawa 2019.
- Maruszewski T., *Psychologia poznania*, GWP, Gdańsk 2019.
- Oatley K, Jenkins J.M, *Zrozumieć emocje*, PWN, Warszawa 2013.
- Para A., *Możliwości wykorzystania grywalizacji w edukacji szkolnej*, E-mentor 1/88/2021.
- Sawiński P., *Sposoby aktywizowania uczniów w szkole XXI wieku*, Delfin, 2021.

- Wedel-Domaradzka A., Raczyńska A., *Jak skutecznie prowadzić zajęcia na platformie edukacyjnej? Poradnik*, KOWEZ i U, Warszawa 2013.
- Wallace P., *Psychologia Internetu*, PWN, Warszawa 2018.

NETOGRAFIA

- <https://en.wikipedia.org/wiki/Gamification>, [dostęp 19.11.2021].
- <http://www.e-mentor.edu.pl/artykul/index/numer/25/id/552>, [dostęp 19.11.21].
- <http://www.e-mentor.edu.pl/artykul/index/numer/10/id/161>, [dostęp 19.11.21].
- file:///C:/Users/ORE/AppData/Local/Temp/Poradnik_Jak_prowadzic.pdf [dostęp 19.11.21].
- <https://zpe.gov.pl/ksztalcenie-ogolne/szkola-ponadpodstawowa>. [dostęp 19.11.21].